

§ 28. *Oscillazioni anarmoniche*

Tutta la teoria delle piccole oscillazioni precedentemente esposta è basata su uno sviluppo delle energie cinetica e potenziale secondo le velocità e le coordinate considerando soltanto i termini del secondo ordine; le equazioni del moto risultano allora lineari, ciò che permette in questa approssimazione di parlare di oscillazioni *lineari*. Sebbene questo metodo sia del tutto legittimo quando l'ampiezza delle oscillazioni è sufficientemente piccola, il tener conto delle approssimazioni successive (della cosiddetta *anarmonicità* o *non linea-*

rità delle oscillazioni) porta alla comparsa di proprietà del moto che, pur essendo deboli, sono qualitativamente nuove.

Sviluppriamo la funzione di Lagrange sino ai termini del terzo ordine. Nell'energia potenziale appariranno allora termini di terzo grado in coordinate x_i , mentre nell'energia cinetica appariranno termini contenenti prodotti delle velocità e delle coordinate del tipo $\dot{x}_i \dot{x}_h x_l$; questa differenza dalla precedente espressione (23,3) è dovuta alla conservazione dei termini del primo ordine rispetto ad x nello sviluppo delle funzioni $a_{ih}(q)$. In tal modo, la funzione di Lagrange assumerà la forma

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i, h} (m_{ih} \dot{x}_i \dot{x}_h - k_{ih} x_i x_h) + \frac{1}{2} \sum_{i, h, l} n_{ihl} \dot{x}_i \dot{x}_h x_l - \frac{1}{3} \sum_{i, h, l} l_{ihl} x_i x_h x_l, \quad (28,1)$$

dove n_{ihl} , l_{ihl} sono nuovi coefficienti costanti.

Se si passa dalle coordinate arbitrarie x_i alle coordinate normali Q_α (dell'approssimazione lineare), in virtù della linearità di questa trasformazione, la terza e la quarta somma nella (28,1) si trasformeranno in somme analoghe dove le coordinate x_i e le velocità \dot{x}_i verranno sostituite con Q_α e \dot{Q}_α . Indicando i coefficienti in queste somme con $\lambda_{\alpha\beta\gamma}$ e $\mu_{\alpha\beta\gamma}$, otteniamo la funzione di Lagrange

$$L = \frac{1}{2} \sum (\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \lambda_{\alpha\beta\gamma} \dot{Q}_\alpha \dot{Q}_\beta Q_\gamma - \frac{1}{3} \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \mu_{\alpha\beta\gamma} Q_\alpha Q_\beta Q_\gamma. \quad (28,2)$$

Non scriveremo tutte le equazioni del moto che derivano da questa funzione lagrangiana. L'essenziale è che esse sono della forma

$$\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = f_\alpha(Q, \dot{Q}, \ddot{Q}), \quad (28,3)$$

dove f_α sono funzioni omogenee del secondo ordine delle coordinate Q e delle loro derivate rispetto al tempo.

Applicando il metodo delle approssimazioni successive, cerchiamo per queste equazioni una soluzione del tipo

$$Q_\alpha = Q_\alpha^{(1)} + Q_\alpha^{(2)}, \quad (28,4)$$

dove $Q_\alpha^{(2)} \ll Q_\alpha^{(1)}$ e dove le funzioni $Q_\alpha^{(1)}$ soddisfano le equazioni « imperturbate »

$$\ddot{Q}_\alpha^{(1)} + \omega_\alpha^2 Q_\alpha^{(1)} = 0,$$

cioè rappresentano oscillazioni armoniche ordinarie

$$Q_\alpha^{(1)} = a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \alpha_\alpha). \quad (28,5)$$

Nell'approssimazione seguente, conservando nel secondo membro delle equazioni (28,3) soltanto termini infinitesimi del secondo ordine, otterremo per le grandezze $Q_\alpha^{(2)}$ le equazioni

$$\ddot{Q}_\alpha^{(2)} + \omega_\alpha^2 Q_\alpha^{(2)} = f_\alpha(Q^{(1)}, \dot{Q}^{(1)}, \ddot{Q}^{(1)}), \quad (28,6)$$

dove, nel secondo membro, si deve sostituire l'espressione (28,5). Come risultato, otterremo equazioni differenziali lineari non omogenee in cui il secondo membro può essere trasformato in somme di funzioni periodiche semplici. Per esempio,

$$Q_\alpha^{(1)} Q_\beta^{(1)} = a_\alpha a_\beta \cos(\omega_\alpha t + \alpha_\alpha) \cos(\omega_\beta t + \alpha_\beta) = \frac{1}{2} a_\alpha a_\beta \{ \cos[(\omega_\alpha + \omega_\beta)t + \alpha_\alpha + \alpha_\beta] + \cos[(\omega_\alpha - \omega_\beta)t + \alpha_\alpha - \alpha_\beta] \}.$$

In tal modo, i secondi membri delle equazioni (28,6) contengono termini che corrispondono alle oscillazioni di frequenze uguali alle somme e alle differenze delle oscillazioni proprie del sistema. La soluzione delle equazioni va cercata sotto la forma contenente questi stessi fattori periodici; giungiamo quindi alla conclusione che, nella seconda approssimazione, oscillazioni supplementari di frequenze

$$\omega_\alpha \pm \omega_\beta \quad (28,7)$$

(comprese le frequenze $2\omega_\alpha$ e la frequenza 0 corrispondente ad uno spostamento costante) si sovrappongono con le oscillazioni normali del sistema di frequenze ω_α . Le frequenze di queste oscillazioni supplementari sono dette *combinatorie*. Le ampiezze delle oscillazioni combinatorie sono proporzionali ai prodotti $a_\alpha a_\beta$ (oppure ai quadrati $a_\alpha^{(2)}$) delle corrispondenti oscillazioni normali.

Nelle approssimazioni successive, tenendo conto di termini d'ordine più elevato nello sviluppo della funzione di Lagrange, appaiono oscillazioni combinatorie le cui frequenze sono somme e differenze di un numero più grande di frequenze ω_α . Inoltre, si verifica un altro fenomeno nuovo.

Già nell'approssimazione del terzo ordine appaiono, tra le oscillazioni combinatorie, oscillazioni che coincidono con quelle iniziali ω_α (cioè $\omega_\alpha + \omega_\beta - \omega_\beta$). Applicando il metodo descritto sopra al secondo membro delle equazioni del moto, si avranno quindi termini di risonanza che daranno nella soluzione termini con ampiezza crescente col tempo. È fisicamente evidente, però, che in un sistema isolato, in assenza di sorgenti esterne d'energia, non ci possono essere incrementi spontanei dell'intensità delle oscillazioni.

In realtà, nelle approssimazioni superiori, le frequenze fondamentali ω_α subiscono variazioni in confronto ai loro valori « imperturbati » $\omega_\alpha^{(0)}$ che figurano nell'espressione quadratica dell'energia potenziale. La comparsa dei termini crescenti col tempo nella soluzione

ne è dovuta ad uno sviluppo del tipo

$$\cos(\omega_\alpha^{(0)} + \Delta\omega_\alpha)t \approx \cos\omega_\alpha^{(0)}t - t\Delta\omega_\alpha \sin\omega_\alpha^{(0)}t,$$

che evidentemente non è ammissibile per t è abbastanza grandi.

Quindi, quando si passa all'approssimazione seguente, il metodo delle approssimazioni successive dev'essere modificato in maniera tale che i fattori periodici che figurano nella soluzione contengano sin dall'inizio i valori esatti e non approssimati delle frequenze. Nella soluzione delle equazioni le variazioni delle frequenze vengono determinate dalla condizione di assenza dei termini di risonanza.

Illustriamo questo metodo nel caso delle oscillazioni anarmoniche con un solo grado di libertà; scriviamo la funzione di Lagrange nella forma

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega_0^2}{2}x^2 - \frac{m\alpha}{3}x^3 - \frac{m\beta}{4}x^4. \quad (28,8)$$

La corrispondente equazione del moto è

$$\ddot{x} + \omega_0^2x = -\alpha x^2 - \beta x^3. \quad (28,9)$$

Cerchiamo la soluzione sotto forma di una serie di approssimazioni successive

$$x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)},$$

dove

$$x^{(1)} = a \cos \omega t \quad (28,10)$$

con un valore esatto per ω che cerchiamo in seguito sotto forma di una serie $\omega = \omega_0 + \omega^{(1)} + \omega^{(2)} + \dots$ (si può sempre annullare la fase iniziale nella $x^{(1)}$ con una scelta appropriata dell'origine dei tempi). Nonostante questo, la forma (28,9) dell'equazione del moto non è comoda: dopo la sostituzione della (28,10) il primo membro dell'uguaglianza non diventa rigorosamente nullo. Pertanto scriviamo preliminarmente l'equazione nella forma equivalente

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \ddot{x} + \omega_0^2x = -\alpha x^2 - \beta x^3 - \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) \ddot{x}. \quad (28,11)$$

Ponendo qui $x = x^{(1)} + x^{(2)}$, $\omega = \omega_0 + \omega^{(1)}$ ed omettendo gli infinitesimi superiori al secondo ordine, otteniamo per $x^{(2)}$ l'equazione

$$\begin{aligned} \ddot{x}^{(2)} + \omega_0^2x^{(2)} &= -\alpha a^2 \cos^2 \omega t + 2\omega_0\omega^{(1)}a \cos \omega t = \\ &= -\frac{\alpha a^2}{2} - \frac{\alpha a^2}{2} \cos 2\omega t + 2\omega_0\omega^{(1)}a \cos \omega t. \end{aligned}$$

La condizione di assenza del termine di risonanza nel secondo membro dell'uguaglianza dà semplicemente $\omega^{(1)} = 0$, in accordo con

il metodo di ricerca della seconda approssimazione esposto all'inizio di questo paragrafo. Risolvendo poi col metodo ordinario questa equazione lineare non omogenea, otteniamo:

$$x^{(2)} = -\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2} + \frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2} \cos 2\omega t. \quad (28,12)$$

In seguito, ponendo nella (28,11) $x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)}$, $\omega = \omega_0 + \omega^{(2)}$, otteniamo per $x^{(3)}$ l'equazione

$$\ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2x^{(3)} = -2\alpha x^{(1)}x^{(2)} - \beta x^{(1)3} + 2\omega_0\omega^{(2)}x^{(1)}$$

oppure, riportando nel secondo membro le espressioni (28,10) e (28,12) dopo una semplice trasformazione:

$$\begin{aligned} \ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2x^{(3)} &= -a^3 \left[\frac{\beta}{4} + \frac{\alpha^2}{6\omega_0^2} \right] \cos 3\omega t + \\ &+ a \left[2\omega_0\omega^{(2)} + \frac{5\alpha^2\alpha^2}{6\omega_0^2} - \frac{3}{4}a^2\beta \right] \cos \omega t. \end{aligned}$$

Ponendo uguale a zero il coefficiente del fattore di risonanza $\cos \omega t$, troviamo la correzione alla frequenza fondamentale, proporzionale al quadrato dell'ampiezza dell'oscillazione:

$$\omega^{(2)} = \left(\frac{3\beta}{8\omega_0} - \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^2} \right) a^2. \quad (28,13)$$

L'oscillazione combinatoria del terzo ordine è

$$x^{(3)} = \frac{a^2}{16\omega_0^2} \left(\frac{\alpha^2}{3\omega_0^2} + \frac{\beta}{2} \right) \cos 3\omega t. \quad (28,14)$$

§ 29. Risonanza nelle oscillazioni non lineari

Se si tiene conto dei termini anarmonici nelle oscillazioni forzate di un sistema, nei fenomeni di risonanza compaiono proprietà qualitativamente nuove.

Aggiungendo al secondo membro dell'equazione (28,9) una forza esterna periodica (di frequenza γ), si ottiene:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2x = \frac{f}{m} \cos \gamma t - \alpha x^2 - \beta x^3; \quad (29,1)$$

dove abbiamo scritto anche la forza d'attrito con coefficiente di smorzamento λ (che in seguito supporremo piccolo). Volendo essere rigorosi fino in fondo, se si tiene conto dei termini non lineari nell'equazione delle oscillazioni libere, si dovrebbero prendere in considerazione anche i termini d'ordine superiore nell'ampiezza della forza esterna, termini che corrispondono ad una eventuale dipendenza di quest'ultima dallo spostamento x . Noi non scriveremo questi

termini per rendere piú semplici le formule; infatti, essi non modificano l'aspetto qualitativo dei fenomeni.

Sia

$$\gamma = \omega_0 + \varepsilon$$

(con ε piccolo), siamo cioè in prossimità di una risonanza ordinaria. Per chiarire il carattere del moto, si può anche fare a meno di uno studio diretto dell'equazione (29,1), se si tiene conto delle considerazioni seguenti.

Nell'approssimazione lineare, la relazione tra l'ampiezza b dell'oscillazione forzata da una parte, l'ampiezza f e la frequenza γ della forza esterna dall'altra, è data in prossimità della risonanza dalla formula (26,7), che scriviamo come segue:

$$b^2 (\varepsilon^2 + \lambda^2) = \frac{f^2}{4m^2\omega_0^2}. \quad (29,2)$$

Il carattere non lineare delle oscillazioni implica una relazione tra la loro frequenza propria e l'ampiezza; scriviamo questa dipendenza nella forma

$$\omega_0 + \kappa b^2, \quad (29,3)$$

dove la costante κ è espressa in un modo ben determinato mediante i coefficienti di anarmonicità [cfr. (28,13)]. Conformemente a ciò, sostituiamo nella (29,2) (o meglio, nella piccola differenza $\gamma - \omega_0$) ω_0 con $\omega_0 + \kappa b^2$.

Conservando la notazione $\varepsilon = \gamma - \omega_0$, otteniamo in definitiva l'equazione

$$b^2 [(\varepsilon - \kappa b^2)^2 + \lambda^2] = \frac{f^2}{4m^2\omega_0^2} \quad (29,4)$$

ossia

$$\varepsilon = \kappa b^2 \pm \sqrt{\left(\frac{f}{2m\omega_0 b}\right)^2 - \lambda^2}.$$

L'equazione (29,4) è cubica rispetto a b^2 , e le sue radici reali determinano l'ampiezza delle oscillazioni forzate. Consideriamo la dipendenza di questa ampiezza dalla frequenza della forza esterna per una data ampiezza f della forza.

Per valori di f sufficientemente piccoli anche l'ampiezza b è piccola, quindi si possono trascurare nella (29,4) i gradi di b superiori al secondo, e la formula ottenuta coincide con la già nota funzione $b(\varepsilon)$ (29,2), che rappresenta una curva simmetrica con un massimo nel punto $\varepsilon = 0$ (fig. 32, a). Con il crescere di f la curva subisce una deformazione, conservando ancora in un primo tempo il suo carattere, mantenendo cioè un solo massimo (fig. 32, b); il picco si sposta (per $\kappa > 0$) nel senso delle ε positive. Delle tre radici dell'equazione (29,4) una sola è reale.

Tuttavia, a partire da un determinato valore $f = f_k$ (che verrà definito dopo), il carattere della curva cambia. Per ciascun valore di $f > f_k$ esiste una determinata regione di frequenze nella quale l'equazione (29,4) ha tre radici reali; a questa regione corrisponde la porzione BCDE della curva nella fig. 32, c.

I limiti di questa regione sono definiti dalla condizione $\frac{db}{d\varepsilon} = \infty$ nei punti D e C. Differenziando l'equazione (29,4) rispetto ad ε , abbiamo:

$$\frac{db}{d\varepsilon} = \frac{-\varepsilon b + \kappa b^3}{\varepsilon^2 + \lambda^2 - 4\kappa\varepsilon b^2 + 3\kappa^2 b^4}.$$

La posizione dei punti D e C si determina dunque, risolvendo contemporaneamente l'equazione

$$\varepsilon^2 - 4\kappa b^2 \varepsilon + 3\kappa^2 b^4 + \lambda^2 = 0 \quad (29,5)$$

e l'equazione (29,4); i valori corrispondenti di ε sono ambedue positivi. Il valore massimo dell'ampiezza si ottiene nel punto dove $\frac{db}{d\varepsilon} = 0$. Si ha allora $\varepsilon = \kappa b^2$, e la (29,4) ci dà

$$b_{\max} = \frac{f}{2m\omega_0\lambda}; \quad (29,6)$$

questo valore coincide con il massimo dato dalla relazione (29,2).

Si può dimostrare (non tratteremo qui questo argomento¹⁾) che delle tre radici reali dell'equazione (29,4) quella intermedia (la porzione CD della curva, tratteggiata nella fig. 32, c) corrisponde ad oscillazioni instabili del sistema: ogni forza, per debole che sia, agendo su un sistema che si trova in questo stato, causerebbe il passaggio a un regime oscillatorio corrispondente alla radice massima o minima (cioè alle porzioni BC o DE). Di conseguenza, soltanto i rami ABC e DEF corrispondono a reali oscillazioni del sistema. La presenza di una regione di frequenze che ammette due ampiezze differenti delle oscillazioni rappresenta una rimarchevole proprietà. Al progressivo aumentare della frequenza della forza esterna aumenta l'ampiezza delle oscillazioni forzate secondo la curva ABC. Nel punto C si ha una « rottura » dell'ampiezza, che cade

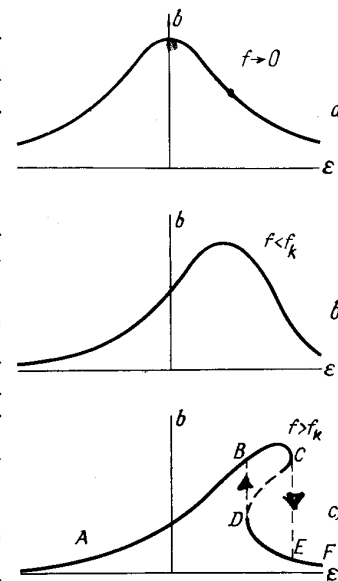


Fig. 32

¹⁾ Si può trovare la dimostrazione, per esempio, nell'opera di N. Bogoliubov e J. Mitropolskij, *Asimptoticheskie metody v teorii nelinejnykh kolebanij* (Metodi asintotici nella teoria delle oscillazioni non lineari), Fizmatgiz, Mosca, 1958.

bruscamente sino al valore corrispondente al punto E , per poi variare lungo la curva EF (all'ulteriore aumentare della frequenza). Se ora diminuiamo di nuovo la frequenza, l'ampiezza delle oscillazioni forzate varia lungo la curva FD , salta dal punto D al punto B per poi decrescere lungo BA .

Per valutare il valore f_h , notiamo che esso rappresenta quel valore di f per il quale ambedue le radici della equazione quadratica rispetto a b^2 (29,5) coincidono; per $f = f_h$ tutta la parte CD si riduce ad un punto di flesso. Uguagliando a zero il discriminante dell'equazione di secondo grado (29,5), si ottiene $\varepsilon^2 = 3\lambda^2$; la radice corrispondente dell'equazione è $\kappa b^2 = 2\varepsilon/3$. Sostituendo questi valori di b ed ε nella (29,4), otteniamo:

$$f_h^2 = \frac{32m^2\omega_0^2\lambda^3}{3\sqrt{3}|\kappa|}. \quad (29,7)$$

Accanto ad un cambiamento del carattere dei fenomeni di risonanza per frequenze $\gamma \approx \omega_0$, la non linearità delle oscillazioni genera anche la comparsa di nuove risonanze nelle quali le oscillazioni di frequenza vicina a ω_0 sono eccitate da una forza esterna di frequenza abbastanza differente da ω_0 .

Sia $\gamma \approx \omega_0/2$ la frequenza della forza esterna, cioè

$$\gamma = \frac{\omega_0}{2} + \varepsilon.$$

Nella prima approssimazione, lineare, essa eccita nel sistema oscillazioni della stessa frequenza e di ampiezza proporzionale all'ampiezza della forza:

$$x^{(1)} = \frac{4f}{3m\omega_0^2} \cos\left(\frac{\omega_0}{2} + \varepsilon\right)t$$

[conformemente alla formula (22,4)]. Tenendo conto dei termini non lineari, nella seconda approssimazione, queste oscillazioni faranno apparire nel secondo membro dell'equazione del moto (29,1) un termine di frequenza $2\gamma \approx \omega_0$. Precisamente, ponendo $x^{(1)}$ nell'equazione

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = -\alpha x^{(1)2},$$

introducendo il coseno dell'angolo doppio e conservando nel secondo membro soltanto il termine di risonanza, otteniamo:

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = -\frac{8\alpha f^2}{9m^2\omega_0^4} \cos(\omega_0 + 2\varepsilon)t. \quad (29,8)$$

Questa equazione differisce dalla (29,1) soltanto per il fatto che al posto dell'ampiezza della forza f , essa contiene un'espressione proporzionale ad f^2 . Ciò significa che ha luogo una risonanza dello stesso carattere di quella esaminata precedentemente per le frequenze $\gamma \approx \omega_0$,

ma di intensità inferiore. La funzione $b(\varepsilon)$ si ottiene sostituendo f con $-8\alpha f^2/9m\omega_0^4$ (ed ε con 2ε) nell'equazione (29,4):

$$b^2[(2\varepsilon - \kappa b^2)^2 + \lambda^2] = \frac{16\alpha^2 f^4}{81m^4\omega_0^{10}}. \quad (29,9)$$

Sia ora

$$\gamma = 2\omega_0 + \varepsilon$$

la frequenza della forza esterna. Nella prima approssimazione abbiamo:

$$x^{(1)} = -\frac{f}{3m\omega_0^2} \cos(2\omega_0 + \varepsilon)t.$$

Sostituendo $x = x^{(1)} + x^{(2)}$ nell'equazione (29,1), non otterremo termini aventi il carattere di una forza esterna di risonanza, com'è avvenuto nel caso precedente. Nasce, però, una risonanza di tipo parametrico dal termine del terzo ordine proporzionale al prodotto $x^{(1)}x^{(2)}$. Se di tutti i termini non lineari conserviamo soltanto questo, avremo per $x^{(2)}$ l'equazione

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2x^{(2)} = -2\alpha x^{(1)}x^{(2)}$$

ovvero

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 \left[1 - \frac{2\alpha f}{3m\omega_0^2} \cos(2\omega_0 + \varepsilon)t \right] x^{(2)} = 0, \quad (29,10)$$

cioè un'equazione del tipo (27,8) (tenendo conto dell'attrito) che porta, come abbiamo già visto, ad oscillazioni instabili in un determinato intervallo di frequenze.

Questa equazione non è però sufficiente per determinare l'ampiezza risultante delle oscillazioni che dipende dagli effetti della non linearità; per tenerne conto è necessario conservare nell'equazione del moto anche i termini non lineari rispetto ad $x^{(2)}$:

$$\begin{aligned} \ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} &= \\ &= \frac{2\alpha f}{3m\omega_0^2} \cos(2\omega_0 + \varepsilon)t \cdot x^{(2)}. \end{aligned} \quad (29,11)$$

Lo studio di questo problema si semplifica se si considera la seguente circostanza. Ponendo nel secondo membro dell'equazione (29,11)

$$x^{(2)*} = b \cos\left[\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + \delta\right]$$

(dove b è l'ampiezza delle oscillazioni di risonanza cercata e δ uno sfasamento costante con conseguenze poco importanti) e scrivendo il prodotto dei due fattori periodici sotto forma di una somma di

due coseni, otterremo il termine di risonanza ordinaria

$$\frac{\alpha f b}{3m\omega_0^2} \cos \left[\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t - \delta \right]$$

(rispetto alla frequenza propria ω_0 del sistema.). Di conseguenza, il problema si riduce nuovamente a quello della risonanza ordinaria in un sistema non lineare, che abbiamo esaminato all'inizio del presente paragrafo, con la sola differenza che ora il valore dell'ampiezza

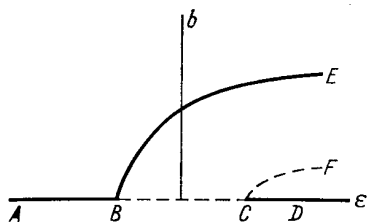


Fig. 33

della forza esterna è dato dalla grandezza $\alpha f b / 3m\omega_0^2$ (ed al posto di ε si ha $\varepsilon/2$). Facendo questa sostituzione nell'equazione (29,4), si ottiene:

$$b^2 \left[\left(\frac{\varepsilon}{2} - \kappa b^2 \right)^2 + \lambda^2 \right] = \frac{\alpha^2 f^2 b^2}{36m^2 \omega_0^4}.$$

Risolviendo questa equazione rispetto a b , troviamo i seguenti valori possibili per l'ampiezza:

$$b = 0, \quad (29,12)$$

$$b^2 = \frac{1}{\kappa} \left[\frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha f}{6m\omega_0^2} \right)^2 - \lambda^2} \right], \quad (29,13)$$

$$b^2 = \frac{1}{\kappa} \left[\frac{\varepsilon}{2} - \sqrt{\left(\frac{\alpha f}{6m\omega_0^2} \right)^2 - \lambda^2} \right]. \quad (29,14)$$

La relazione così ottenuta tra b ed ε è rappresentata nella fig. 33 (per $\kappa > 0$; se $\kappa < 0$, le curve sono dirette in senso opposto). I punti B e C corrispondono ai valori

$$\varepsilon = \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha f}{3m\omega_0^2} \right)^2 - 4\lambda^2}.$$

A sinistra del punto B è possibile soltanto il valore $b = 0$, cioè la risonanza manca e le oscillazioni di frequenza prossima a ω_0 non vengono eccitate. Nell'intervallo tra B e C abbiamo due radici: $b = 0$ (segmento BC nella fig. 33) e l'espressione (29,13) (ramo BE). Infine, a destra del punto C esistono tutte e tre le radici: (29,12), (29,13), (29,14). Tuttavia non tutti questi valori corrispondono ad un regime

oscillatorio stabile. Il valore $b = 0$ è instabile nella parte BC^1), e si può dimostrare anche che il regime corrispondente alla radice (29,14) (intermedia tra le altre due) è sempre instabile. Nella fig. 33 i valori instabili di b sono tratteggiati.

Vediamo, per esempio, come si comporta un sistema, dapprima « perseverante in quiete »²⁾, quando gradualmente diminuisce la frequenza della forza esterna. Fino al punto C , resta sempre $b = 0$; dopo si produce una « rottura » di questo stato e si passa sul ramo EB . In seguito, ad un'ulteriore diminuzione di ε , l'ampiezza delle oscillazioni decresce sino a zero nel punto B . Aumentando di nuovo la frequenza, l'ampiezza delle oscillazioni cresce lungo la curva BE^3).

I casi di risonanza considerati sono i casi principali che si verificano in un sistema oscillante non lineare. A più alte approssimazioni compaiono risonanze anche ad altre frequenze. A rigore, si deve avere risonanza per ogni frequenza γ per cui $n\gamma + m\omega_0 = \omega_0$ (n, m interi), cioè per ogni $\gamma = p\omega_0/q$, dove p e q sono pure numeri interi. Ciò nonostante, a misura che il grado di approssimazione si eleva l'intensità dei fenomeni di risonanza (come pure l'ampiezza degli intervalli di frequenze in cui devono aver luogo) diminuisce con una rapidità tale che, in realtà, si possono osservare soltanto le risonanze per le frequenze $\gamma \approx p\omega_0/q$ con p e q piccoli.