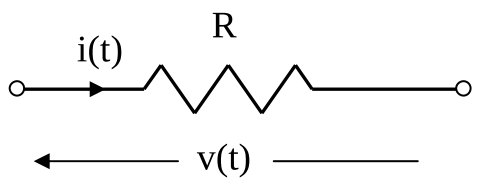
MODELLI DEI SISTEMI FISICI ELEMENTARI

La modellistica è la disciplina che si occupa della costruzione dei modelli matematici dei sistemi. Nel seguito introduciamo dei cenni di modellistica sulla base delle leggi fondamentali dei sistemi che sono solitamente di interesse nei controlli automatici.

Trattandosi di sistemi SISO lineari tempoinvarianti, i modelli oggetto della nostra analisi possono essere sempre espressi come modelli ingresso-uscita nel dominio della variabile complessa s, ossia per mezzo della funzione di trasferimento del sistema in analisi.

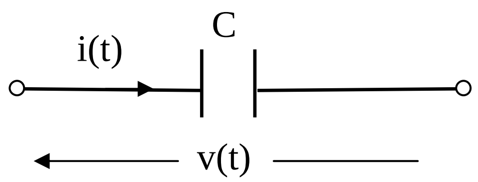
SISTEMI ELETTRICI

Gli elementi elettrici fondamentali sono il resistore, il condensatore e l'induttore.



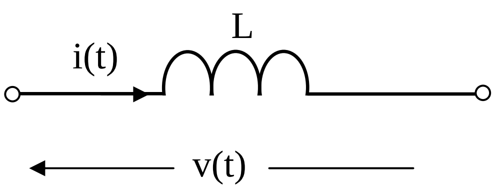
La legge fondamentale del resistore di resistenza R è

$$v(t) = R \cdot i(t)$$



La legge fondamentale del condensatore di capacità C è

$$i(t) = C \cdot \frac{dv(t)}{dt}$$



La legge fondamentale dell'induttore con induttanza L è

$$v(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}.$$

Un generico circuito elettrico può essere modellato applicando le leggi fisiche dei suoi componenti su riportate e le leggi di Kirchoff delle correnti e delle tensioni. Il corrispondente modello nella variabile di s si ottiene trasformando le equazioni risultanti secondo Laplace e combinando le equazioni algebriche ottenute, eliminando le variabili intermedie, sino ad ottenere il modello ingresso uscita dato dalla funzione di trasferimento del sistema:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

essendo x(t) l'ingresso del sistema e y(t) la corrispondente uscita forzata. È quanto è stato fatto per modellare i sistemi elementari del primo e del secondo ordine, nonché le reti correttrici.

Un metodo alternativo consiste nell'associare una funzione di trasferimento anche ai componenti elettrici elementari e descrivere il modello complessivo combinando tali funzioni di trasferimento elementari.

Si definisce così impedenza di un componente elettrico la funzione di trasferimento:

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)}$$

dove v(t) è la tensione misurata ai morsetti del componente elettrico, mentre i(t) è la corrente elettrica che lo attraversa.

Ne consegue che il concetto di impedenza è analogo a quello di resistenza, ma è applicabile anche ad elementi quali il condensatore e l'induttore.

Trasformando secondo Laplace le leggi fisiche elementari viste precedentemente si determinano con semplici passaggi l'impedenza del resistore R, del condensatore C e dell'induttore L:

$$Z_R(s) = R, \qquad Z_C(s) = \frac{1}{Cs}, \qquad Z_L(s) = Ls.$$

Per la legge di Kirchoff delle tensioni l'impedenza di una serie di componenti elettrici è pari alla somma delle singole impedenze.

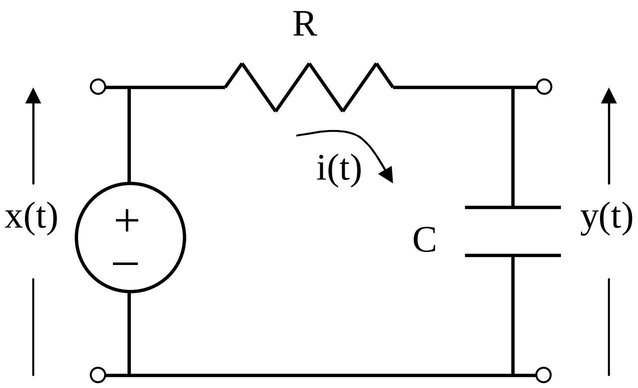
Analogamente, per la legge di Kirchoff delle correnti l'inverso delle impedenze di un parallelo di componenti elettrici è pari alla somma degli inversi delle impedenze.

L'inverso dell'impedenza è detta ammettenza, dunque l'ammettenza di un parallelo di componenti elettrici è pari alla somma delle ammettenze.

Si conclude dunque che il concetto di impedenza generalizza quello di resistenza.

Applicando i concetti di impedenza e ammettenza è molto semplice derivare le funzioni di trasferimento di sistemi elettrici.

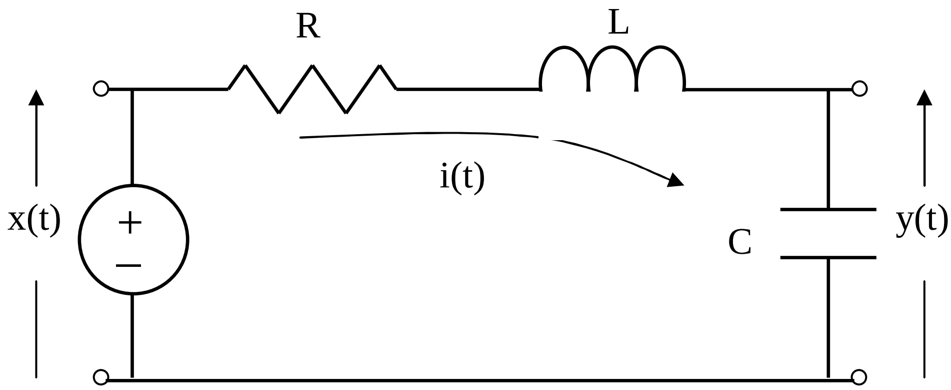
Prendiamo il caso del sistema elettrico del primo ordine.



Applicando il partitore tra le *impedenze* del condensatore e del resistore si ha la funzione di trasferimento del sistema:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{1}{1 + RCs} .$$

Analogamente è possibile ragionare per il sistema elementare del secondo ordine.



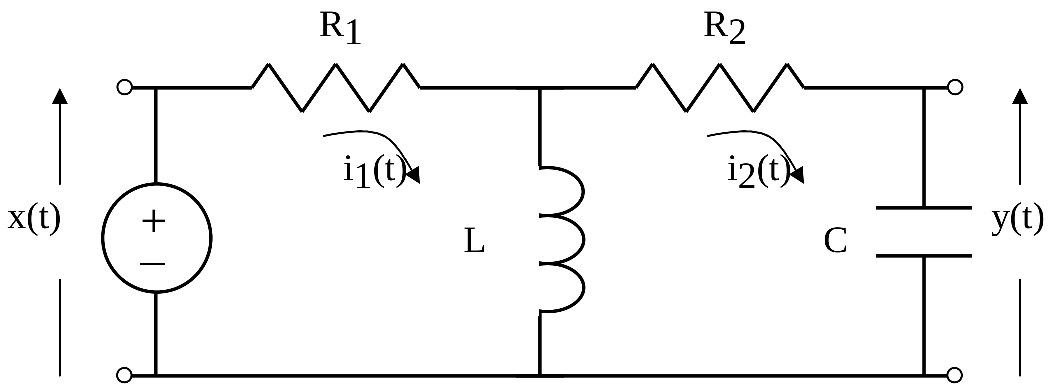
Con la regola del partitore tra le *impedenze* si ha la funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{1}{Cs}}{R + Ls + \frac{1}{Cs}} = \frac{1}{1 + RCs + LCs^2} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} .$$

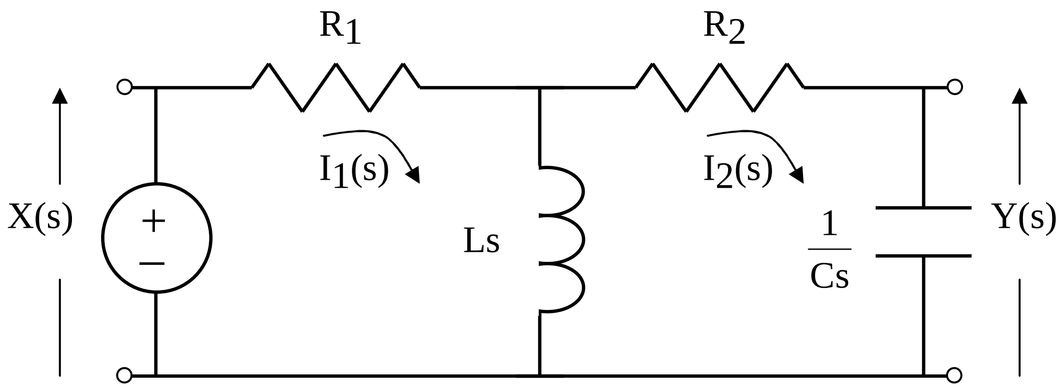
RISOLUZIONE DEI CIRCUITI ELETTRICI CON IL METODO DELLE MAGLIE

I circuiti elettrici più complessi possono essere risolti e quindi modellati con un semplice metodo, detto metodo delle maglie. Il metodo comprende i seguenti passi:

1. Si sostituiscono tutti i componenti elettrici con le loro impedenze.
2. Si sostituiscono tutte le sorgenti di tensione e tutte le variabili temporali con la loro trasformata di Laplace.
3. Si individuano tutte le maglie indipendenti presenti nel sistema.
4. Si considera una corrente $I_i(s)$ in ciascuna delle i=1,..,n maglie.
5. Si scrive la legge di Kirchoff delle tensioni per ciascuna maglia indipendente.
6. Si risolve il sistema di equazioni algebriche scritte al punto precedente.
7. Si scrive la funzione di trasferimento del sistema.



Applicando i punti 1, 2, 3 e 4 si ha il circuito equivalente della figura seguente.



e le equazioni che descrivono le due maglie indipendenti sono:

$$X(s) = R_1 I_1(s) + Ls\left(I_1(s) - I_2(s)\right)$$

$$Ls\left(I_1(s) - I_2(s)\right) = R_2 I_2(s) + \frac{1}{Cs} I_2(s)$$

che si possono riscrivere come segue:

$$
\begin{aligned}
&(R_1 + Ls)I_1(s) - (Ls)I_2(s) = X(s) \\
&-(Ls)I_1(s) + (Ls + R_2 + \frac{1}{Cs})I_2(s) = 0
\end{aligned}
$$

ossia

$$
\begin{cases}
+\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{impedenze}\\ \text{nella maglia 1}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\text{Corrente nella}\\ \text{maglia 1}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{impedenze tra}\\ \text{le maglie 1 e 2}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\text{Corrente nella}\\ \text{maglia 2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{sorgenti di tensione}\\ \text{nella maglia 1}\end{pmatrix} \\
-\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{impedenze tra}\\ \text{le maglie 1 e 2}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\text{Corrente nella}\\ \text{maglia 1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{impedenze}\\ \text{nella maglia 2}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\text{Corrente nella}\\ \text{maglia 2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{sorgenti di tensione}\\ \text{nella maglia 2}\end{pmatrix}
\end{cases}
$$

che equivale al seguente sistema di equazioni algebriche:

$$
\begin{bmatrix}
+\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{impedenze}\\ \text{nella maglia 1}\end{pmatrix} & -\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{impedenze tra}\\ \text{le maglie 1 e 2}\end{pmatrix} \\
-\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{impedenze tra}\\ \text{le maglie 1 e 2}\end{pmatrix} & +\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{impedenze}\\ \text{nella maglia 2}\end{pmatrix}
\end{bmatrix} \cdot
\begin{bmatrix}
\begin{pmatrix}\text{Corrente nella}\\ \text{maglia 1}\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}\text{Corrente nella}\\ \text{maglia 2}\end{pmatrix}
\end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{sorgenti di tensione}\\ \text{nella maglia 1}\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{sorgenti di tensione}\\ \text{nella maglia 2}\end{pmatrix}
\end{bmatrix}.
$$

ovvero

$$
\begin{bmatrix} Z_{11}(s) & -Z_{12}(s) \\ -Z_{21}(s) & Z_{22}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(s) \\ 0 \end{bmatrix},
$$

cioè

$$\mathbf{Z(s)} \cdot \mathbf{I(s)} = \mathbf{X(s)}$$

dove si è indicato con **Z(s)**, **I(s)** e **X(s)** rispettivamente la matrice delle impedenze, il vettore delle correnti di maglia e il vettore delle sorgenti di tensione nelle maglie indipendenti. Si osserva inoltre che la matrice delle impedenze è simmetrica.

Pertanto, è molto semplice scrivere per ispezione il precedente sistema. Inoltre, esso si può risolvere facilmente come segue:

$$I_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} X(s) & -Z_{12}(s) \\ 0 & Z_{22}(s) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11}(s) & -Z_{12}(s) \\ -Z_{21}(s) & Z_{22}(s) \end{vmatrix}}; \; I_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11}(s) & X(s) \\ -Z_{21}(s) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11}(s) & -Z_{12}(s) \\ -Z_{21}(s) & Z_{22}(s) \end{vmatrix}}.$$

In particolare, se definiamo la funzione di trasferimento del sistema come

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{1}{SC} \cdot I_2(s)}{X(s)}$$

delle equazioni risolutive per le correnti ci interessa solo la seconda, ossia:

$$I_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} (R_1 + Ls) & X(s) \\ -(Ls) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (R_1 + Ls) & -(Ls) \\ -(Ls) & (Ls + R_2 + \frac{1}{Cs}) \end{vmatrix}} = \frac{+Ls}{(R_1 + Ls) \cdot (Ls + R_2 + \frac{1}{Cs}) - L^2 s^2} \cdot X(s),$$

da cui si ha la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{\frac{1}{sC} \cdot I_2(s)}{X(s)} = \frac{\frac{1}{sC} \cdot Ls}{(R_1 + Ls) \cdot (Ls + R_2 + \frac{1}{Cs}) - L^2 s^2}$$

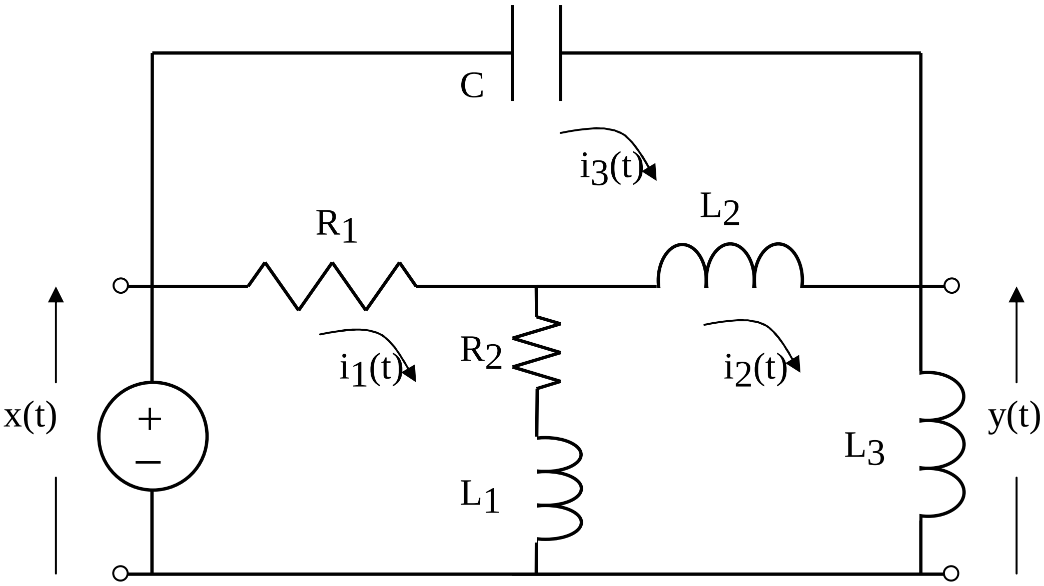
o anche, dopo semplici passaggi

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Ls}{(R_1 + R_2) \cdot LCs^2 + (R_1 R_2 C + L)s + R_1}.$$

Si ottiene evidentemente una funzione di trasferimento del secondo ordine, poiché il sistema elettrico comprende un’induttore e un condensatore indipendenti.

ESEMPIO

Si calcoli la funzione di trasferimento del circuito in figura, sapendo che R_1=R_2=1 Ω, L_1=2 H, L_2=4 H, L_3= 3 H, C=1 F.



Il circuito contiene tre maglie indipendenti, di cui scriviamo le equazioni per ispezione come segue:

$$\begin{cases}
+\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{impedenze}\\ \text{nella maglia 1}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{Corrente nella}\\ \text{maglia 1}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{impedenze tra}\\ \text{le maglie 1 e 2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{Corrente nella}\\ \text{maglia 2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{impedenze tra}\\ \text{le maglie 1 e 3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{Corrente nella}\\ \text{maglia 3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{sorgenti di tensione}\\ \text{nella maglia 1}\end{pmatrix}\\
-\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{impedenze tra}\\ \text{le maglie 1 e 2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{Corrente nella}\\ \text{maglia 1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{impedenze}\\ \text{nella maglia 2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{Corrente nella}\\ \text{maglia 2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{impedenze tra}\\ \text{le maglie 2 e 3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{Corrente nella}\\ \text{maglia 3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{sorgenti di tensione}\\ \text{nella maglia 2}\end{pmatrix}\\
-\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{impedenze tra}\\ \text{le maglie 1 e 3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{Corrente nella}\\ \text{maglia 1}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{impedenze tra}\\ \text{le maglie 2 e 3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{Corrente nella}\\ \text{maglia 2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{impedenze}\\ \text{nella maglia 3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{Corrente nella}\\ \text{maglia 3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{sorgenti di tensione}\\ \text{nella maglia 3}\end{pmatrix}
\end{cases}$$

ossia

$$\begin{aligned}
&+(1+1+2s)\cdot I_1(s)-(1+2s)\cdot I_2(s)-(1)\cdot I_3(s)=X(s)\\
&-(1+2s)\cdot I_1(s)+(2s+1+4s+3s)\cdot I_2(s)-(4s)\cdot I_3(s)=0\,.\\
&-(1)\cdot I_1(s)-(4s)\cdot I_2(s)+(1+4s+\frac{1}{s})\cdot I_3(s)=0
\end{aligned}$$

Si ha

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{3s\cdot I_2(s)}{X(s)}$$

dunque delle equazioni risolutive per le correnti ci interessa solo la seconda, ossia:

$$I_2(s)=\frac{\begin{vmatrix} 2s+2 & X(s) & -1 \\ -2s-1 & 0 & -4s \\ -1 & 0 & 4s+1+\frac{1}{s} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2s+2 & -2s-1 & -1 \\ -2s-1 & 9s+1 & -4s \\ -1 & -4s & 4s+1+\frac{1}{s} \end{vmatrix}}=$$

$$=\frac{-\begin{vmatrix} -2s-1 & -4s \\ -1 & 4s+1+\frac{1}{s} \end{vmatrix}}{(2s+2)\cdot(9s+1)\cdot(4s+1+\frac{1}{s})-2\cdot 4s\cdot(2s+1)-(9s+1)-16s^2\cdot(2s+2)-(2s+1)^2\cdot(4s+1+\frac{1}{s})}\cdot X(s)$$

da cui

$$G(s)=\frac{s\cdot\left((2s+1)\cdot(4s+1+\frac{1}{s})+16s^2\right)}{(2s+2)\cdot(9s+1)\cdot(4s^2+s+1)-8s^2\cdot(2s+1)-s\cdot(9s+1)-16s^3\cdot(2s+2)-(2s+1)^2\cdot(4s^2+s+1)}\,.$$

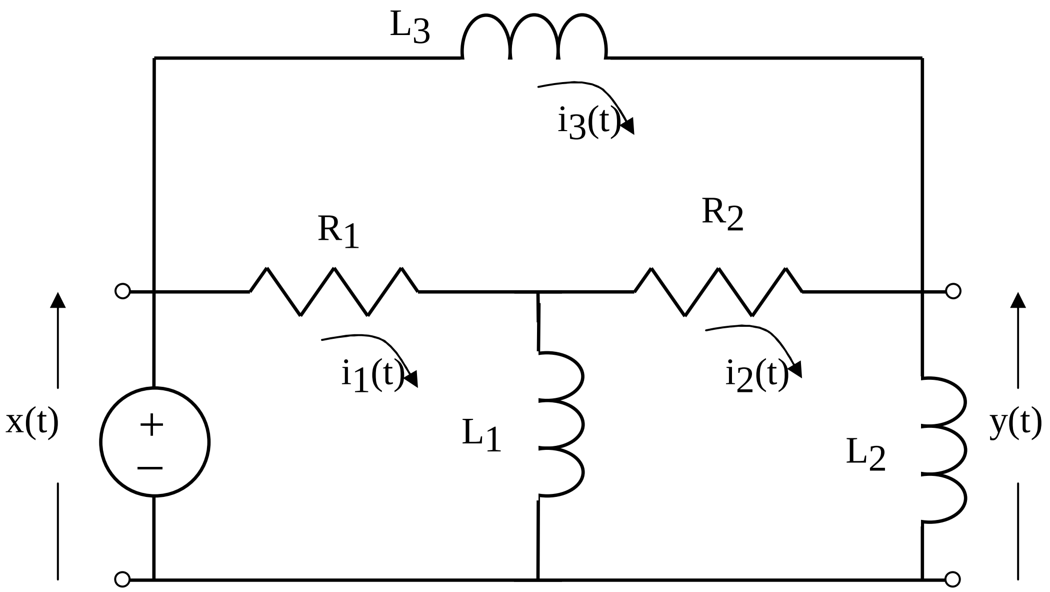
Si ha in definitiva:

$$G(s)=\frac{8s^3+10s^2+3s+1}{24s^4+30s^3+17s^2+16s+1}$$

ed evidentemente il sistema è del quarto ordine (infatti esso comprende quattro elementi conservativi indipendenti, di cui tre sono induttori e uno è un condensatore).

ESEMPIO

Si calcoli la funzione di trasferimento del circuito in figura, sapendo che R_1=R_2=1 Ω, L_1=L_2=L_3=1 H.



Il circuito contiene tre maglie indipendenti, di cui scriviamo le equazioni per ispezione come segue:

$$\begin{cases} +\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{impedenze}\\ \text{nella maglia 1}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{Corrente nella}\\ \text{maglia 1}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{impedenze tra}\\ \text{le maglie 1 e 2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{Corrente nella}\\ \text{maglia 2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{impedenze tra}\\ \text{le maglie 1 e 3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{Corrente nella}\\ \text{maglia 3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{sorgenti di tensione}\\ \text{nella maglia 1}\end{pmatrix}\\ -\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{impedenze tra}\\ \text{le maglie 1 e 2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{Corrente nella}\\ \text{maglia 1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{impedenze}\\ \text{nella maglia 2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{Corrente nella}\\ \text{maglia 2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{impedenze tra}\\ \text{le maglie 2 e 3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{Corrente nella}\\ \text{maglia 3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{sorgenti di tensione}\\ \text{nella maglia 2}\end{pmatrix}\\ -\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{impedenze tra}\\ \text{le maglie 1 e 3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{Corrente nella}\\ \text{maglia 1}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{impedenze tra}\\ \text{le maglie 2 e 3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{Corrente nella}\\ \text{maglia 2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{impedenze}\\ \text{nella maglia 3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{Corrente nella}\\ \text{maglia 3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{sorgenti di tensione}\\ \text{nella maglia 3}\end{pmatrix}\end{cases}$$

ossia

$$\begin{aligned}&+(s+1)\cdot I_1(s)-(s)\cdot I_2(s)-(1)\cdot I_3(s)=X(s)\\ &-(s)\cdot I_1(s)+(2s+1)\cdot I_2(s)-(1)\cdot I_3(s)=0\\ &-(1)\cdot I_1(s)-(1)\cdot I_2(s)+(s+2)\cdot I_3(s)=0\end{aligned}\quad .$$

Si ha

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s \cdot I_2(s)}{X(s)}$$

dunque delle equazioni risolutive per le correnti ci interessa solo la seconda, ossia:

$$I_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} s+1 & X(s) & -1 \\ -s & 0 & -1 \\ -1 & 0 & s+2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+1 & -s & -1 \\ -s & 2s+1 & -1 \\ -1 & -1 & s+2 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{s \cdot (s+2) + 1}{(s+1)(2s+1)(s+2) - 2s - (2s+1) - (s+1) - s^2(s+2)} X(s)$$

da cui

$$G(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + s}{(2s^2 + 3s + 1)(s+2) - 5s - 2 - s^3 - 2s^2} = \frac{s^3 + 2s^2 + s}{s^3 + 5s^2 + 2s}.$$

Si ha in definitiva:

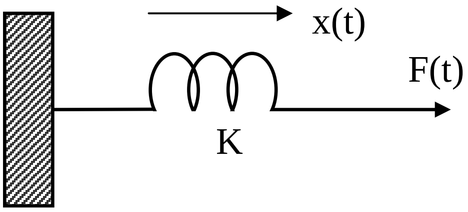
$$G(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^2 + 5s + 2}.$$

Si ottiene una funzione di trasferimento con denominatore originariamente del terzo ordine (infatti il circuito comprende tre induttori indipendenti), che tuttavia presenta un polo nell'origine coincidente con lo zero dovuto all'uscita prescelta (la corrente che scorre nell'induttore L_2). Pertanto, si ha una cancellazione polo-zero che porta l'ordine del sistema a due.

SISTEMI MECCANICI TRASLATORI

Gli elementi meccanici traslatori fondamentali sono la molla, l'ammortizzatore o smorzatore e la massa.

La legge fondamentale della molla ideale con costante elastica K è



$$F(t) = K \cdot x(t)$$

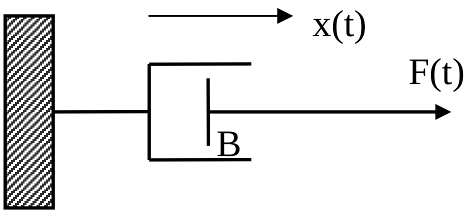
essendo x(t) la deformazione della molla corrispondente all'applicazione di una forza F(t) ad un'estremità della molla stessa.

Trasformando secondo Laplace la precedente equazione si ha una funzione di trasferimento tra spostamento e forza del tipo:

$$\frac{F(s)}{X(s)} = K\,,$$

che può quindi essere utilizzata come una 'impedenza' equivalente del sistema meccanico elementare 'molla ideale' considerato equivalente ad un circuito elettrico con ingresso in corrente x(t) e uscita in tensione F(t).

La legge fondamentale dell'ammortizzatore di attrito viscoso B è



$$F(t) = B \cdot \frac{dx(t)}{dt}$$

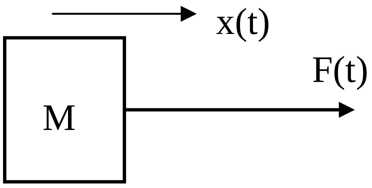
essendo x(t) lo spostamento corrispondente all'applicazione di una forza F(t) ad un'estremità dello smorzatore.

Trasformando secondo Laplace la precedente equazione si ha una funzione di trasferimento tra spostamento e forza del tipo:

$$\frac{F(s)}{X(s)} = Bs\,,$$

che è quindi l'impedenza equivalente del sistema smorzatore ideale.

La legge fondamentale che descrive una massa ideale M è



$$F(t) = M \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

essendo x(t) lo spostamento corrispondente all'applicazione di una forza F(t).

Trasformando secondo Laplace la precedente equazione si ha una funzione di trasferimento tra spostamento e forza del tipo:

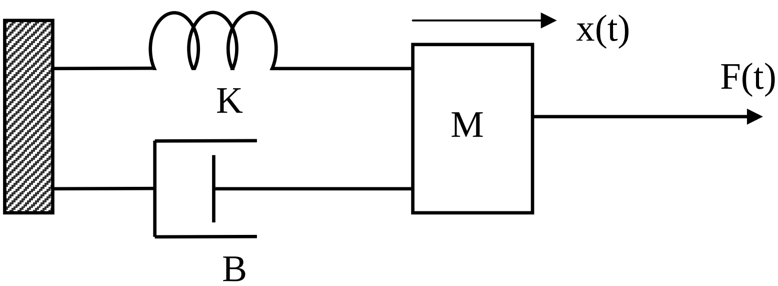
$$\frac{F(s)}{X(s)} = Ms^2,$$

che è l'impedenza equivalente del sistema elementare dato dalla massa ideale.

Utilizzando le precedenti impedenze equivalenti è possibile scrivere per ispezione, con il metodo delle maglie visto per i sistemi elettrici, le equazioni che descrivono un qualsiasi sistema meccanico traslatorio, semplicemente sostituendo alle correnti gli spostamenti e alle tensioni le forze. In questo caso le maglie indipendenti sono sostituite dalle masse indipendenti.

ESEMPIO

Si scriva la funzione di trasferimento tra forza F(t) e spostamento x(t) del sistema meccanico in figura.



Il sistema si può risolvere scrivendo l'equilibrio meccanico orizzontale per la massa:

$$M\frac{d^2x(t)}{d^2t} = F(t) - B\frac{dx(t)}{dt} - Kx(t)$$

ovvero

$$F(t) = M\frac{d^2x(t)}{d^2t} + B\frac{dx(t)}{dt} + Kx(t).$$

Quindi si può trasformare secondo Laplace l'equazione, per poi ricavare la funzione di trasferimento.

Un efficace metodo alternativo è quello per ispezione. Si ha un'unica 'maglia', ossia un'unica massa indipendente M per la quale si scrive l'equivalente meccanico della legge di Kirchoff delle tensioni:

$$\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{impedenze}\\ \text{collegate alla}\\ \text{massa}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\text{Spostamento}\\ \text{della massa}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{forze applicate}\\ \text{alla massa}\end{pmatrix}$$

ossia

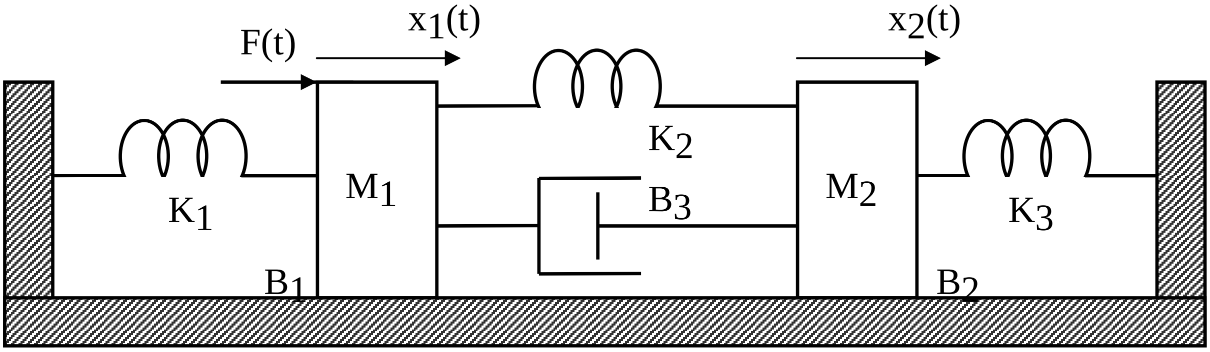
$$(Ms^2 + Bs + K) \cdot X(s) = F(s)$$

da cui semplicemente

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K} = \frac{1}{K} \cdot \frac{\frac{K}{M}}{s^2 + \frac{B}{M}s + \frac{K}{M}} = \frac{1}{K} \cdot \frac{\omega_n{}^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n{}^2}$$

che è nella classica forma del sistema elementare del secondo ordine, a meno del guadagno.

ESEMPIO



Si determini la funzione di trasferimento tra l'ingresso di forza F(t) cui è sottoposta la prima massa e lo spostamento della seconda massa $x_2(t)$.

Le equazioni del sistema si scrivono per ispezione come segue:

$$+\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{impedenze}\\ \text{della massa 1}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{Spostamento}\\ \text{della massa 1}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{impedenze tra}\\ \text{le masse 1 e 2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{Spostamento}\\ \text{della massa 2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{forze applicate}\\ \text{alla massa 1}\end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{impedenze tra}\\ \text{le masse 1 e 2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{Spostamento}\\ \text{della massa 1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{impedenze}\\ \text{della massa 2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{Spostamento}\\ \text{della massa 2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{forze applicate}\\ \text{alla massa 2}\end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{aligned}&\left(M_1s^2+(B_1+B_3)s+(K_1+K_2)\right)\cdot X_1(s)-\left(B_3s+K_2\right)\cdot X_2(s)=F(s)\\ &-\left(B_3s+K_2\right)\cdot X_1(s)+\left(M_2s^2+(B_2+B_3)s+(K_2+K_3)\right)\cdot X_2(s)=0\end{aligned}.$$

La funzione di trasferimento è

$$G(s)=\frac{X_2(s)}{F(s)}$$

quindi risolviamo la sesconda equazione:

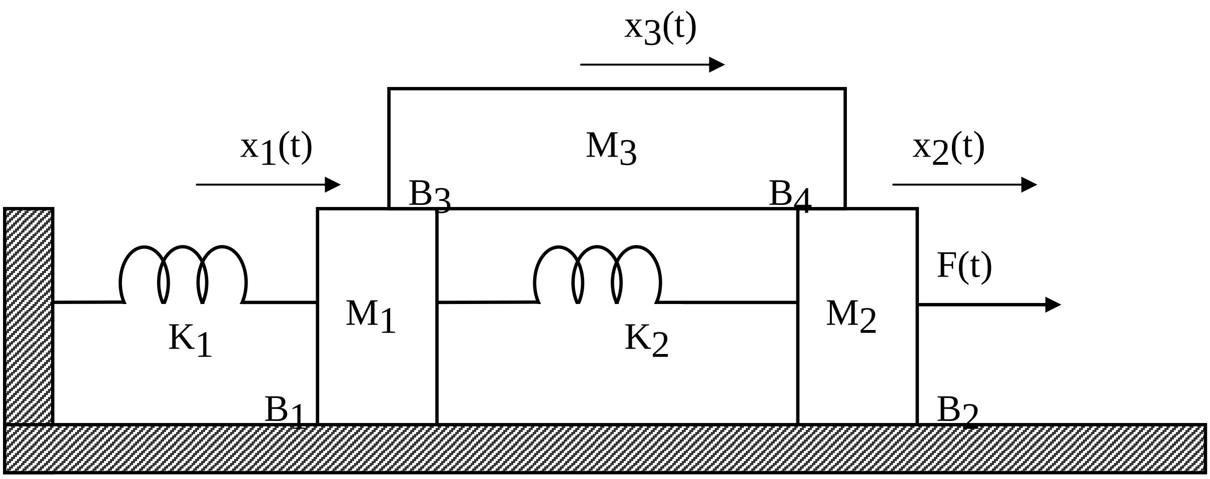
$$X_2(s)=\frac{\begin{vmatrix}M_1s^2+(B_1+B_3)s+(K_1+K_2) & F(s)\\ -\left(B_3s+K_2\right) & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}M_1s^2+(B_1+B_3)s+(K_1+K_2) & -\left(B_3s+K_2\right)\\ -\left(B_3s+K_2\right) & M_2s^2+(B_2+B_3)s+(K_2+K_3)\end{vmatrix}}$$

da cui

$$G(s)=\frac{X_2(s)}{F(s)}=\frac{\left(B_3s+K_2\right)}{\left(M_1s^2+(B_1+B_3)s+(K_1+K_2)\right)\cdot\left(M_2s^2+(B_2+B_3)s+(K_2+K_3)\right)-\left(B_3s+K_2\right)^2}.$$

Si ottiene evidentemente una funzione di trasferimento del quarto ordine, poiché il sistema meccanico comprende due masse indipendenti (infatti per la legge di Newton ciascuna massa dà luogo ad un'equazione differenziale del secondo ordine).

ESEMPIO



Per il sistema in figura, si scriva il sistema di equazioni che lo modellano nel dominio della trasformata di Laplace.

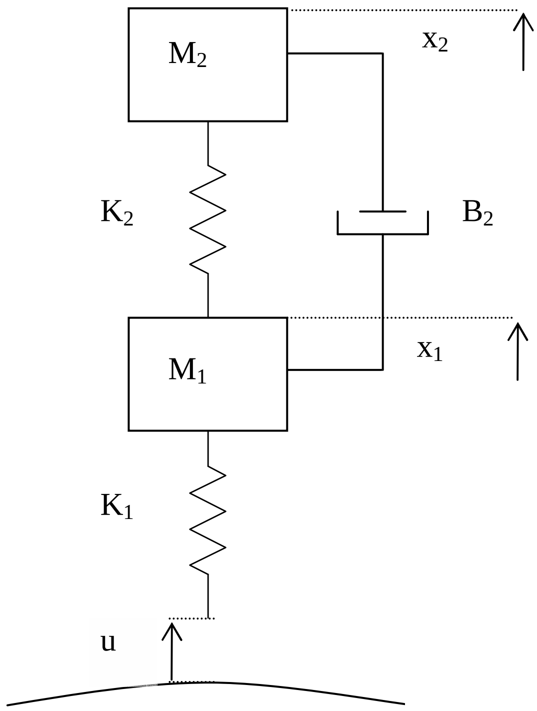
Per ispezione si hanno tre masse indipendenti, dunque tre equazioni:

$$
\begin{aligned}
&\left(M_1 s^2 + (B_1 + B_3)s + (K_1 + K_2)\right) \cdot X_1(s) - \left(K_2\right) \cdot X_2(s) - \left(B_3 s\right) \cdot X_3(s) = 0 \\
&-\left(K_2\right) \cdot X_1(s) + \left(M_2 s^2 + (B_2 + B_4)s + K_2\right) \cdot X_2(s) - \left(B_4 s\right) \cdot X_3(s) = F(s) \quad . \\
&-\left(B_3 s\right) \cdot X_1(s) - \left(B_4 s\right) \cdot X_2(s) + \left(M_3 s^2 + (B_3 + B_4)s\right) \cdot X_3(s) = 0
\end{aligned}
$$

Tale sistema di equazioni può facilmente essere risolto per $X_1(s)$, $X_2(s)$ o $X_3(s)$.

ESEMPIO

Consideriamo il sistema SISO lineare tempoinvariante che modella una sospensione (passiva) automobilistica, rappresentata in figura, con ingresso u (lo spostamento lineare del battistrada). Il modello è anche detto 'modello del quarto di macchina', poiché rappresenta il modello di un quarto di un autoveicolo, viste le simmetrie longitudinali e laterali.



Dette x_2 la posizione dell'autoveicolo, $\dot{x}_2$ la velocità dell'autoveicolo, x_1 la posizione della ruota e $\dot{x}_1$ la sua velocità, si suppone che $k_1 = 140000$ N/m sia la rigidità del pneumatico, $k_2 = 12000$ N/m sia la rigidità dell'ammortizzatore, $B_2 = 800$ N/m/s l'attrito viscoso della sospensione, $M_1 = 50$ kg la massa del pneumatico e $M_2 = 200$ kg sia il quarto della massa dell'autoveicolo, se questo ha quattro ruote.
Per ispezione si scrivono le equazioni del sistema:

$$\left(M_1 s^2 + B_2 s + (K_1 + K_2)\right) \cdot X_1(s) - \left(B_2 s + K_2\right) \cdot X_2(s) = K_1 U(s)$$

$$-\left(B_2 s + K_2\right) \cdot X_1(s) + \left(M_2 s^2 + B_2 s + K_2\right) \cdot X_2(s) = 0$$

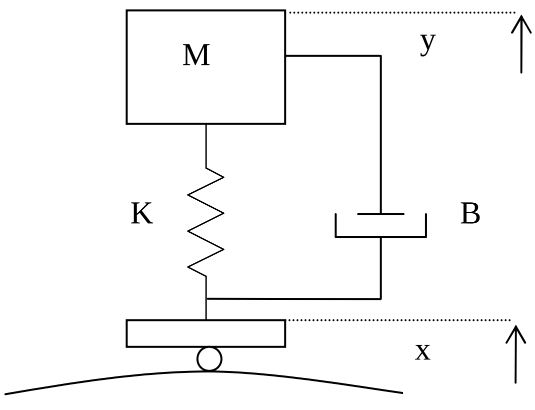
Risolvendo il precedente sistema per determinare la posizione del passeggero, si ottiene la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{X_2(s)}{U(s)} = \frac{\dfrac{K_1 B_2}{M_1 M_2} s + \dfrac{K_1 K_2}{M_1 M_2}}{\left(s^4 + \dfrac{(M_1 + M_2) B_2}{M_1 M_2} s^3 + \left(\dfrac{(M_1 + M_2) K_2}{M_1 M_2} + \dfrac{K_1}{M_1}\right) s^2 + \dfrac{K_1 B_2}{M_1 M_2} s + \dfrac{K_1 K_2}{M_1 M_2}\right)}.$$

Si ottiene evidentemente una funzione di trasferimento del quarto ordine, poiché il sistema meccanico comprende due masse indipendenti.

ESEMPIO

Un altro esempio di sospensione automobilistica è quello rappresentato in figura, che discende dal modello precedente. In questo caso la ruota è considerata un punto materiale privo di massa e con rigidezza nulla. Dunque la sola equazione riguarda la massa M (pari a un quarto di quella dell'autoveicolo). Si ha:



$$\left(Ms^2 + Bs + K\right) \cdot Y(s) - \left(Bs + K\right) \cdot X(s) = 0$$

e quindi la funzione di trasferimento dallo spostamento della ruota x(t) alla posizione dell'autoveicolo vale:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Bs + K}{Ms^2 + Bs + K}.$$

Si ottiene evidentemente una funzione di trasferimento del secondo ordine, poiché il sistema meccanico comprende una sola massa (la ruota del veicolo è un punto materiale).

Invece del metodo per ispezione, per determinare la funzione di trasferimento del sistema è possibile usare l'equilibrio delle forze cui è sottoposta M. Si ha infatti:

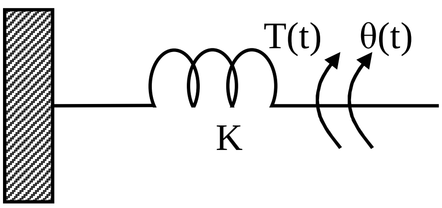
$$M\frac{d^2y(t)}{d^2t} = B\frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) - B\frac{dy(t)}{dt} - Ky(t)$$

dove nella precedente equazione il termine $B\frac{dx(t)}{dt} + Kx(t)$ rappresenta la somma delle forze esterne applicate alla massa M rispettivamente attraverso lo smorzatore e la molla per la presenza dell'ingresso dato dallo spostamento x(t). Evidentemente, trasformando secondo Laplace la precedente espressione si ottiene la funzione di trasferimento determinata.

SISTEMI MECCANICI ROTATORI

Gli elementi meccanici rotatori fondamentali sono la molla torsionale, lo smorzatore e l'inerzia.

La legge fondamentale della molla torsionale ideale con costante elastica K è



$$T(t) = K \cdot \theta(t)$$

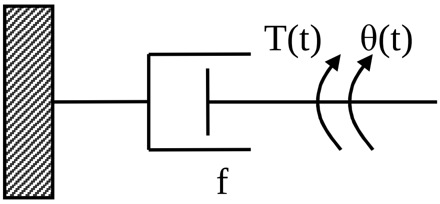
essendo $\theta(t)$ lo spostamento angolare corrispondente all'applicazione della coppia T(t).

Trasformando secondo Laplace la precedente equazione si ha una funzione di trasferimento tra posizione angolare e coppia applicata del tipo:

$$\frac{T(s)}{\Theta(s)} = K,$$

che può quindi essere utilizzata come una 'impedenza' equivalente del sistema meccanico elementare 'molla torsionale ideale'.

La legge fondamentale dell'ammortizzatore torsionale di attrito f è



$$T(t) = f \cdot \frac{d\theta(t)}{dt}$$

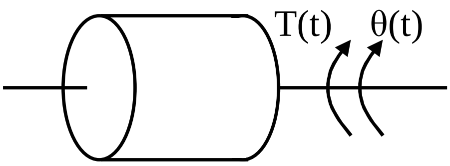
essendo $\theta(t)$ l'angolo di torsione corrispondente all'applicazione della coppia $T(t)$.

Trasformando secondo Laplace la precedente equazione si ha una funzione di trasferimento tra spostamento e forza del tipo:

$$\frac{T(s)}{\Theta(s)} = fs\,,$$

che è quindi l'impedenza equivalente del sistema smorzatore torsionale ideale.

La legge fondamentale che descrive una inerzia ideale J è



$$T(t) = J \cdot \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$$

essendo $\theta(t)$ lo spostamento angolare corrispondente all'applicazione della coppia $T(t)$.

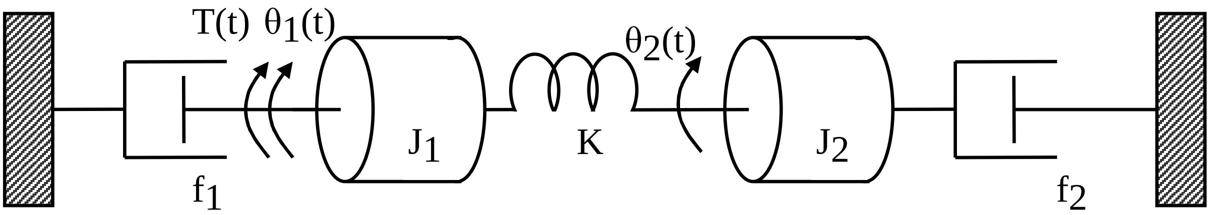
Trasformando secondo Laplace la precedente equazione si ha una funzione di trasferimento tra posizione angolare e coppia del tipo:

$$\frac{T(s)}{\Theta(s)} = Js^2\,,$$

che è l'impedenza equivalente del sistema elementare dato dalla inerzia ideale.

Come nel caso dei sistemi meccanici traslatori, anche per quelli rotatori è possibile, utilizzando le impedenze equivalenti, scrivere per ispezione le equazioni che descrivono un generico sistema meccanico rotatorio, semplicemente sostituendo agli spostamenti lineari quelli angolari e alle forze le coppie. In questo caso le masse indipendenti sono sostituite dalle inerzie indipendenti.

ESEMPIO



Si determini la funzione di trasferimento tra la coppia T(t) e la posizione angolare della seconda inerzia $\theta_2(t)$. Le equazioni del sistema si scrivono per ispezione come segue:

$$
\begin{aligned}
&+\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{impedenze}\\ \text{della inerzia 1}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{Spostamento}\\ \text{della inerzia 1}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{impedenze tra}\\ \text{le inerzie 1 e 2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{Spostamento}\\ \text{della inerzia 2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{coppie applicate}\\ \text{alla inerzia 1}\end{pmatrix}\\
&-\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{impedenze tra}\\ \text{le inerzie 1 e 2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{Spostamento}\\ \text{della inerzia 1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{impedenze}\\ \text{della inerzia 2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\text{Spostamento}\\ \text{della inerzia 2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{coppie applicate}\\ \text{alla inerzia 2}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ossia

$$
\begin{aligned}
&\left(J_1 s^2 + f_1 s + K\right)\cdot\Theta_1(s) - (K)\cdot\Theta_2(s) = T(s)\\
&-(K)\cdot\Theta_1(s) + \left(J_2 s^2 + f_2 s + K\right)\cdot\Theta_2(s) = 0
\end{aligned}
.
$$

La funzione di trasferimento è

$$
G(s) = \frac{\Theta_2(s)}{T(s)}
$$

quindi risolviamo la seconda equazione:

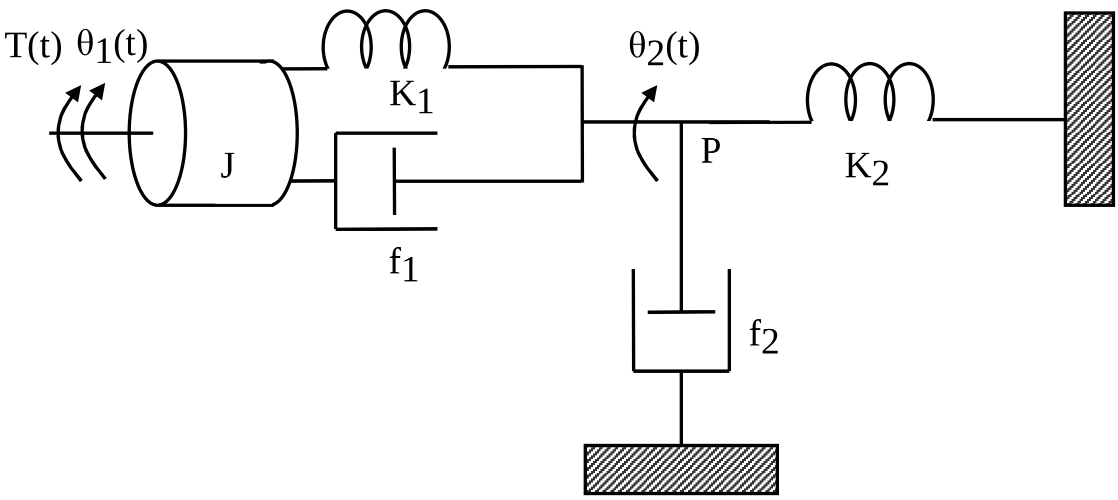
$$
\Theta_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} J_1 s^2 + f_1 s + K & T(s) \\ -K & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} J_1 s^2 + f_1 s + K & -K \\ -K & J_2 s^2 + f_2 s + K \end{vmatrix}}
$$

da cui

$$G(s) = \frac{\Theta_2(s)}{T(s)} = \frac{K}{\left(J_1 s^2 + f_1 s + K\right)\cdot\left(J_2 s^2 + f_2 s + K\right) - K^2}.$$

Si ottiene evidentemente una funzione di trasferimento del quarto ordine, poiché il sistema meccanico comprende due inerzie indipendenti.

ESEMPIO



Si determini la funzione di trasferimento da T(s) a $\Theta_2(s)$, sapendo che J=1 Kg m^2, $K_1=K_2=1$ N m rad^{-1}, $f_1=f_2=1$ N m s rad^{-1}.

Per ispezione si ha:

$$\left(Js^2 + f_1 s + K_1\right)\cdot\Theta_1(s) - \left(f_1 s + K_1\right)\cdot\Theta_2(s) = T(s)$$
$$-\left(f_1 s + K_1\right)\cdot\Theta_1(s) + \left(0s^2 + (f_1+f_2)s + (K_1+K_2)\right)\cdot\Theta_2(s) = 0$$

dove il termine $0s^2$ modella il fatto che l'inerzia dell'asse rotante con posizione angolare $\theta_2(t)$ (ovvero l'inerzia nel punto P in figura) è supposta nulla.

La funzione di trasferimento è

$$G(s) = \frac{\Theta_2(s)}{T(s)}$$

quindi risolviamo la seconda equazione:

$$\Theta_2(s)=\frac{\begin{vmatrix} Js^2+f_1s+K_1 & T(s) \\ -(f_1s+K_1) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Js^2+f_1s+K_1 & -(f_1s+K_1) \\ -(f_1s+K_1) & (f_1+f_2)s+(K_1+K_2) \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} s^2+s+1 & T(s) \\ -s-1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2+s+1 & -s-1 \\ -s-1 & 2s+2 \end{vmatrix}}=$$

$$=\frac{T(s)(s+1)}{(s^2+s+1)(2s+2)-(s+1)^2}=\frac{T(s)}{2(s^2+s+1)-(s+1)}=\frac{T(s)}{2s^2+s+1}$$

da cui

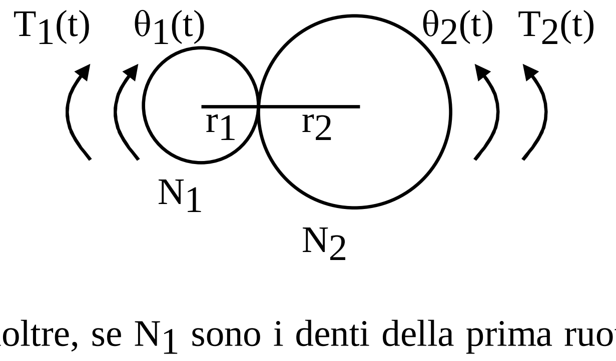
$$G(s)=\frac{\Theta_2(s)}{T(s)}=\frac{1}{2s^2+s+1}.$$

Si ottiene evidentemente una funzione di trasferimento del secondo ordine, poiché il sistema meccanico comprende una sola inerzia.

SISTEMI MECCANICI CON INGRANAGGI

Nei sistemi meccanici rotatori sono spesso presenti degli ingranaggi, che solitamente hanno la funzione di ridurre la velocità angolare di un asse rotante (riduttori).

Si trascurano nel seguito gli effetti di nonlinearità dovuti all'accoppiamento di due o più ruote dentate e si suppone che l'ingranaggio possieda inerzia trascurabile (ossia non immagazzina energia) e attrito trascurabile (non dissipa energia). In altre parole, si suppone ideale l'ingranaggio, ovvero che non vi sia gioco tra i denti delle ruote.



In tali condizioni ideali in ogni istante l'energia entrante nell'ingranaggio è pari a quella uscente.

Si ha dunque:

$$T_1(t)\cdot\theta_1(t)=T_2(t)\cdot\theta_2(t).$$

Inoltre, se N_1 sono i denti della prima ruota dentata, di raggio pari a r_1, e N_2 quella della seconda, avente raggio r_2, risulta:

$$r_1\cdot\theta_1(t)=r_2\cdot\theta_2(t)$$

che esprime l'uguaglianza degli archi sulle ruote dentate, accoppiate nell'ingranaggio. Si ha quindi:

$$\frac{\theta_2(t)}{\theta_1(t)} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

dove l'ultima uguaglianza indica che il numero di denti è proporzionale al raggio della ruota (il che è valido nell'ipotesi che il passo angolare tra i denti sia lo stesso nelle due ruote dentate).

Si ha in definitiva:

$$\frac{\theta_2(t)}{\theta_1(t)} = \frac{T_1(t)}{T_2(t)} = \frac{N_1}{N_2} = K_r$$

dove K_r è il rapporto tra il numero di denti delle ruote dell'ingranaggio o rapporto di riduzione dell'ingranaggio. Nel caso in figura si ha $K_r<1$ e dalla relazione precedente si osserva che l'ingranaggio funziona da riduttore di velocità.

Si osserva infine che derivando la precedente uguaglianza si ottiene la seguente relazione tra le velocità angolari delle ruote:

$$\frac{\omega_2(t)}{\omega_1(t)} = K_r\,.$$

Per riassumere, si hanno le seguenti relazioni:

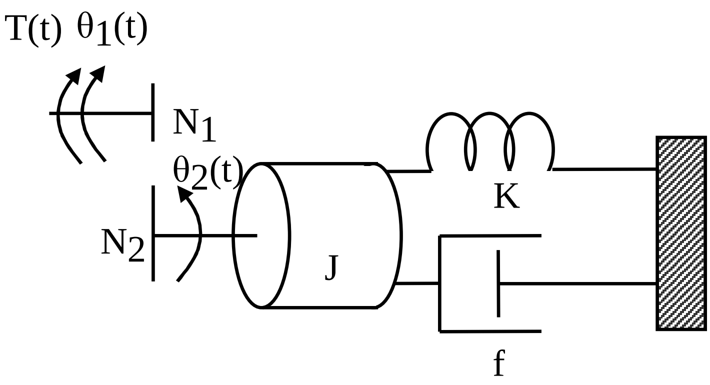
$$\theta_2(t) = \frac{N_1}{N_2}\theta_1(t) \text{ ovvero } \theta_2(t) = K_r\theta_1(t)$$

$$\omega_2(t) = \frac{N_1}{N_2}\omega_1(t) \text{ ovvero } \omega_2(t) = K_r\omega_1(t)$$

$$T_2(t) = \frac{N_2}{N_1}T_1(t) \text{ ovvero } T_2(t) = \frac{1}{K_r}T_1(t)\,.$$

ESEMPIO

Si determini la funzione di trasferimento da T(s) a Θ_2(s).



L'equazione del sistema in figura è la seguente:

$$T_2(s) = \frac{N_2}{N_1} T_1(s)$$

ovvero

$$\left(Js^2 + fs + K\right) \cdot \Theta_2(s) = \frac{N_2}{N_1} T(s).$$

Sostituendo nella precedente equazione la relazione tra gli angoli, ovvero

$$\Theta_2(s) = \frac{N_1}{N_2} \Theta_1(s)$$

si ha

$$\left(Js^2 + fs + K\right) \cdot \frac{N_1}{N_2} \Theta_1(s) = \frac{N_2}{N_1} T(s)$$

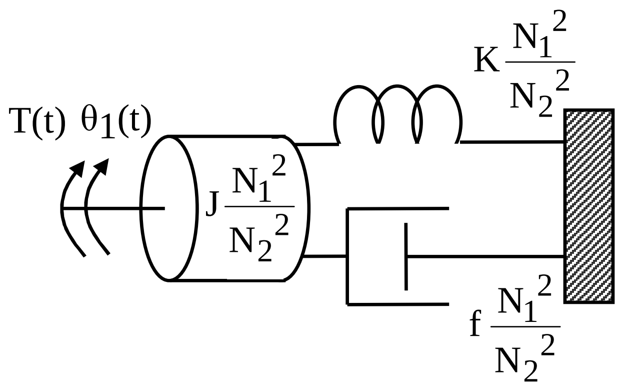
ossia

$$\left(J \frac{N_1^{\,2}}{N_2^{\,2}} s^2 + f \frac{N_1^{\,2}}{N_2^{\,2}} s + K \frac{N_1^{\,2}}{N_2^{\,2}}\right) \cdot \Theta_1(s) = T(s).$$

Se K_r è il rapporto tra il numero di denti delle ruote dell'ingranaggio si ottiene:

$$\left(JK_r^{\,2} s^2 + fK_r^{\,2} s + KK_r^{\,2}\right) \cdot \Theta_1(s) = T(s).$$

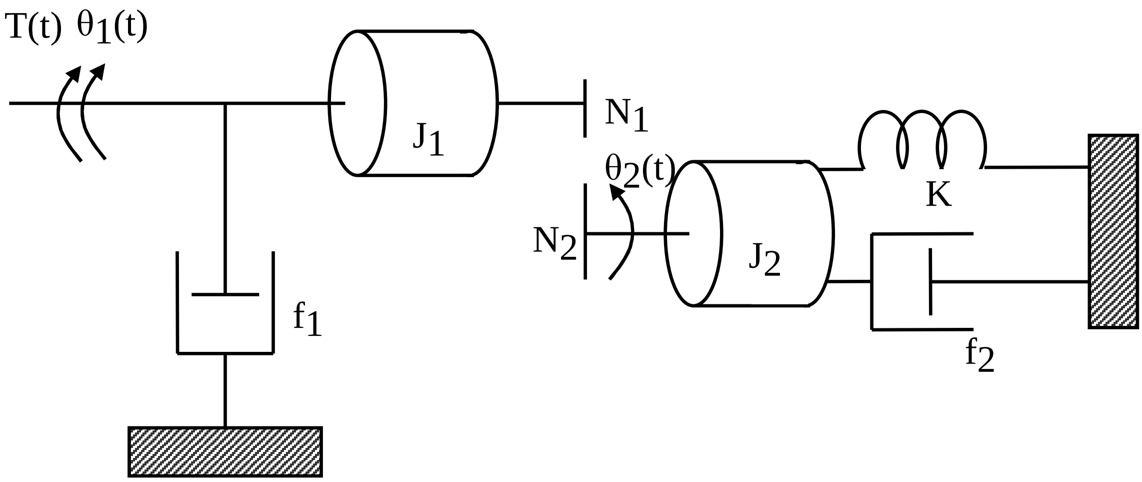
La precedente relazione esprime la proprietà che le impedenze meccaniche rotazionali possono essere riportate a monte dell'ingranaggio, considerando quindi gli angoli e le coppie presenti sul primo asse rotante, a patto di moltiplicarle per il quadrato del rapporto caratteristico dell'ingranaggio. In figura è rappresentato il sistema meccanico equivalente.



Osserviamo infine che si ottiene evidentemente un sistema del secondo ordine, poiché il sistema meccanico comprende una sola inerzia.

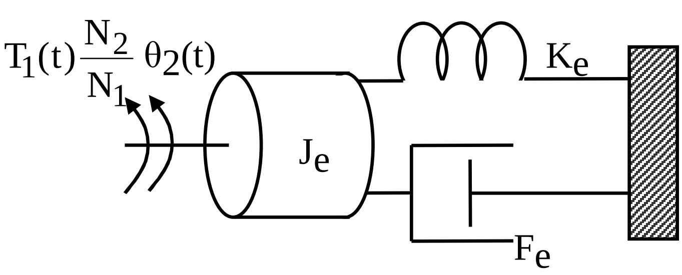
ESEMPIO

Si determini la funzione di trasferimento dalla coppia $T_1(s)$ all'angolo $\Theta_2(s)$ del sistema meccanico rappresentato in figura.



In questo caso la riduzione delle impedenze deve essere eseguita a valle del riduttore, per come è fatta la funzione di trasferimento richiesta.

Per le proprietà degli ingranaggi, il sistema si riduce al sistema complessivo nella figura seguente, con:



$$J_e = J_1 \frac{1}{K_r^2} + J_2 = J_1 \frac{N_2^2}{N_1^2} + J_2,$$

$$f_e = f_1 \frac{1}{K_r^2} + f_2 = f_1 \frac{N_2^2}{N_1^2} + f_2,$$

$$K_e = K.$$

L'equazione del sistema è dunque:

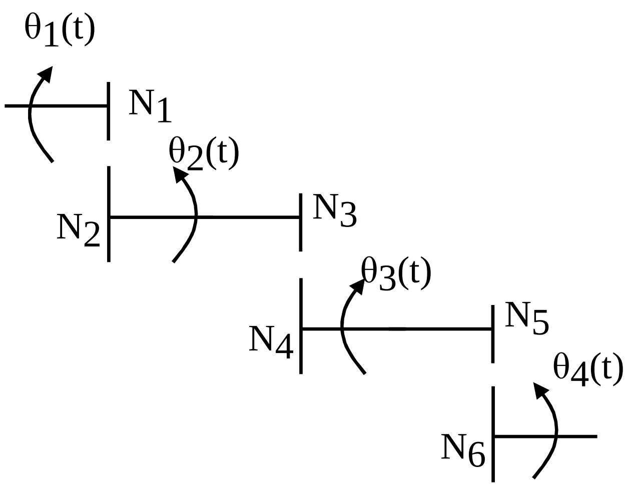
$$\left(J_e s^2 + F_e s + K_e\right) \cdot \Theta_2(s) = T_1(s) \cdot \frac{N_2}{N_1}$$

e la funzione di trasferimento vale

$$G(s) = \frac{\Theta_2(s)}{T_1(s)} = \frac{\frac{N_2}{N_1}}{J_e s^2 + f_e s + K_e} = \frac{\frac{N_2}{N_1}}{(J_1 \frac{N_2^2}{N_1^2} + J_2)s^2 + (f_1 \frac{N_2^2}{N_1^2} + f_2)s + K_2}.$$

È importante osservare come il sistema ottenuto sia del secondo ordine, poiché il sistema meccanico, pur presentando due inerzie, comprende una sola inerzia indipendente.

ESEMPIO



In alcuni casi, per evitare l'utilizzo di ingranaggi con ruote dal diametro molto grande, si preferisce utilizzare diversi ingranaggi accoppiati. È il caso dell'ingranaggio in figura.

La relazione sulle posizioni angolari sono per ciascun ingranaggio le seguenti:

$$\theta_2(t) = K_{r_1}\theta_1(t),\ \theta_3(t) = K_{r_2}\theta_2(t),\ \theta_4(t) = K_{r_3}\theta_3(t)$$

dove evidentemente

$$K_{r_1} = \frac{N_1}{N_2},\ K_{r_1} = \frac{N_3}{N_4},\ K_{r_1} = \frac{N_5}{N_6}.$$

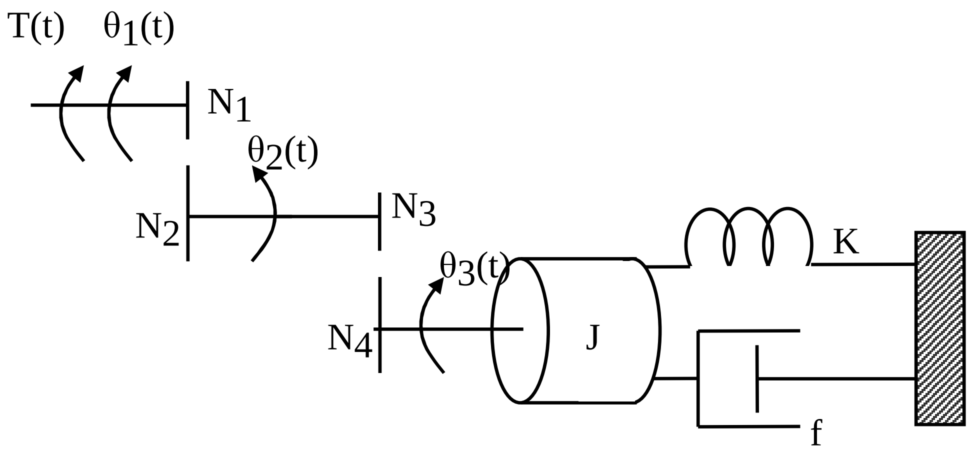
Combinando le relazioni sulle posizioni angolari dei vari assi rotanti si ottiene la relazione descrittiva dell'ingranaggio complessivo

$$\theta_4(t) = K_{r_1} K_{r_2} K_{r_3} \theta_1(t)$$

dove il rapporto di riduzione dell'intero sistema vale

$$K_{r_1} K_{r_2} K_{r_3} = \frac{N_1 N_3 N_5}{N_2 N_4 N_6}.$$

ESEMPIO



Si vuole scrivere la funzione di trasferimento del sistema

$$G(s) = \frac{\Theta_1(s)}{T(s)}.$$

Occorre riportare le impedenze equivalenti sul primo asse rotante. Si ha quindi:

$$\left(J\left(\frac{N_1 N_3}{N_2 N_4}\right)^2 s^2 + f\left(\frac{N_1 N_3}{N_2 N_4}\right)^2 s + K\left(\frac{N_1 N_3}{N_2 N_4}\right)^2 \right) \cdot \Theta_1(s) = T(s)$$

da cui si ricava la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{\Theta_1(s)}{T(s)} = \frac{1}{\left(J\left(\frac{N_1N_3}{N_2N_4}\right)^2 s^2 + f\left(\frac{N_1N_3}{N_2N_4}\right)^2 s + K\left(\frac{N_1N_3}{N_2N_4}\right)^2 \right)}$$

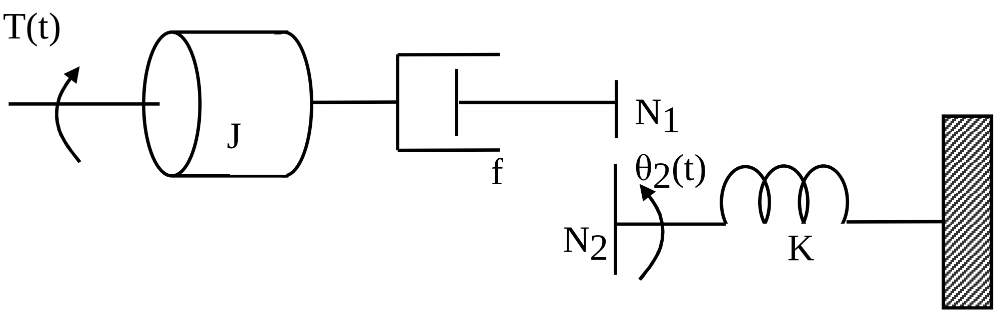
che è del secondo ordine, essendoci una sola inerzia nel sistema.

ESEMPIO

Si determini la funzione di trasferimento del sistema in figura espressa nella forma

$$G(s) = \frac{\Theta_2(s)}{T(s)},$$

sapendo che J=1 Kg m^2, f=1 N m s rad^{-1}, K=4 N m rad^{-1}, N_1=25, N_2=50.



Occorre riportare le impedenze equivalenti al secondo asse rotante. Si ha quindi:

$$\left(J\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 s^2 + f\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 s + K \right) \cdot \Theta_2(s) = T(s) \cdot \frac{N_2}{N_1}$$

da cui si ricava la funzione di trasferimento del secondo ordine (è presente una sola inerzia nel sistema)

$$G(s) = \frac{\Theta_2(s)}{T(s)} = \frac{\frac{N_2}{N_1}}{\left(J\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 s^2 + f\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 s + K \right)} = \frac{2}{4s^2 + 4s + 4} = \frac{\frac{1}{2}}{s^2 + s + 1}.$$