

# Appunti di Antenne

## Capitolo 4 – Antenne ad apertura (II)

PRINCIPIO DI EQUIVALENZA DEI CAMPI .....	1
<i>Introduzione</i> .....	1
<i>Sorgenti magnetiche (fittizie)</i> .....	1
<i>Principio di equivalenza dei campi</i> .....	3
<i>Applicazione all'irradiazione delle antenne ad apertura</i> .....	9
Osservazione .....	14
<i>Guida d'onda rettangolare troncata</i> .....	15
<i>Antenne a tromba</i> .....	20
E-plane horn antennas .....	23
Antenne a tromba piramidale.....	23

### Principio di equivalenza dei campi

#### Introduzione

Nonostante la **tecnica della trasformata di Fourier** consenta calcoli tutto sommato facili per la determinazione del campo irradiato da una **apertura** (illuminata da un campo elettrico noto) su un piano, essa risulta molto meno adatta nei casi in cui l'apertura è praticata su una superficie non piana, come ad esempio quella di un cilindro o di una sfera. Risulta perciò necessario pensare ad altri metodi per studiare la radiazione delle aperture ed è quello di cui vogliamo occuparci adesso.

#### Sorgenti magnetiche (fittizie)

Cominciamo col mostrare rapidamente che è conveniente e utile introdurre **correnti magnetiche** e **cariche fittizie** come tecnica per agevolare l'analisi della irradiazione da una apertura. Le correnti magnetiche  $\mathbf{J}_m$  e le cariche  $\rho_m$  possono essere introdotte nelle **equazioni di Maxwell** in perfetta analogia a quanto si fa per le correnti elettriche  $\mathbf{J}_e$  e le cariche  $\rho_e$ :

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= -j\omega \vec{B} - \vec{J}_m \\ \nabla \times \vec{H} &= j\omega \vec{D} + \vec{J}_e \\ \nabla \cdot \vec{B} &= \rho_m \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho_e\end{aligned}$$

Quando entrambi i tipi di sorgenti sono presenti, il campo risultante è chiaramente la **sovrapposizione** di quello prodotto dalle sorgenti elettriche e quello prodotto dalle sorgenti magnetiche, come se ciascuna coppia agisse separatamente. In particolare:

- il campo prodotto dalle sorgenti elettriche è notoriamente determinabile usando il **potenziale vettore di tipo elettrico**, che indicheremo d'ora in poi con  $\vec{A}_e$  e non più con  $\vec{A}$  come abbiamo fatto in precedenza;
- in modo del tutto analogo, il campo prodotto dalle sorgenti magnetiche può essere determinato usando il **potenziale vettore di tipo magnetico**, che indicheremo con  $\vec{A}_m$ .

Si procede nel modo seguente:

- per prima cosa si determinano i due potenziali vettore appena citati, risolvendo le seguenti due equazioni differenziali di tipo ormai ben noto:

$$\begin{aligned}(\nabla^2 + k_0^2)\vec{A}_e &= -\mu_0\vec{J}_e \\ (\nabla^2 + k_0^2)\vec{A}_m &= -\epsilon_0\vec{J}_m\end{aligned}$$

- in secondo luogo, dai potenziali vettore si risale ai rispettivi campi, tramite le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \left( \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A}_e \right) + \left( -j\omega\vec{A}_m + \frac{\nabla(\nabla \cdot \vec{A}_m)}{j\omega\mu_0\epsilon_0} \right) \\ \vec{E} &= \left( -j\omega\vec{A}_e + \frac{\nabla(\nabla \cdot \vec{A}_e)}{j\omega\mu_0\epsilon_0} \right) + \left( -\frac{1}{\epsilon_0} \nabla \times \vec{A}_m \right)\end{aligned}$$

In entrambe queste ultime espressioni, facciamo osservare che la prima parentesi indica il contributo al campo da parte del potenziale vettore elettrico, così come abbiamo ampiamente visto in precedenza, mentre invece la seconda parentesi indica il contributo al campo da parte del potenziale vettore magnetico introdotto poco fa. Si nota immediatamente la perfetta dualità dei vari termini.

Possiamo anche scendere in maggiori dettagli. Infatti, possiamo subito ricordarci che l'equazione per il potenziale vettore elettrico da la seguente soluzione (valida solo per il campo lontano):

$$\vec{A}_e(\mathbf{P}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-jk_0r}}{r} \iiint_{V'} \vec{J}_e(\mathbf{P}') e^{jk_0(\vec{r}' \cdot \vec{a}_r)} dV'$$

Allora, sfruttando ancora una volta la perfetta dualità, scriviamo immediatamente che l'espressione generale del potenziale vettore magnetico è la seguente:

$$\boxed{\vec{A}_m(\mathbf{P}) = \frac{\epsilon_0}{4\pi} \frac{e^{-jk_0r}}{r} \iiint_{V'} \vec{J}_m(\mathbf{P}') e^{jk_0(\vec{r}' \cdot \vec{a}_r)} dV'}$$

Dobbiamo ora andare a sostituire queste espressioni in quelle del campo elettrico e del campo magnetico. Se consideriamo tali campi solo nella regione lontana, sappiamo che, per quanto riguarda il contributo al campo dovuto al potenziale vettore elettrico (cioè alle sorgenti elettriche), si trovano i seguenti risultati:

$$\vec{J}_e \longrightarrow \begin{cases} \vec{E}_{FF} = E_{FF,\theta} \vec{a}_\theta + E_{FF,\phi} \vec{a}_\phi = -j\omega A_{e,\theta} \cdot \vec{a}_\theta - j\omega A_{e,\phi} \cdot \vec{a}_\phi \\ \vec{H}_{FF} = H_{FF,\theta} \vec{a}_\theta + H_{FF,\phi} \vec{a}_\phi = -\frac{1}{\eta_0} E_{FF,\phi} \cdot \vec{a}_\theta + \frac{1}{\eta_0} E_{FF,\theta} \cdot \vec{a}_\phi = \frac{j\omega}{\eta_0} A_{e,\phi} \cdot \vec{a}_\theta - \frac{j\omega}{\eta_0} A_{e,\theta} \cdot \vec{a}_\phi \end{cases}$$

Possiamo allora banalmente sfruttare ancora una volta la dualità e scrivere che il campo dovuto alle sorgenti magnetiche risulta essere il seguente:

$$\vec{J}_m \longrightarrow \begin{cases} \vec{E}_{FF} = E_{FF,\theta} \vec{a}_\theta + E_{FF,\phi} \vec{a}_\phi = -j\omega\eta_0 A_{m,\phi} \cdot \vec{a}_\theta + j\omega\eta_0 A_{m,\theta} \cdot \vec{a}_\phi \\ \vec{H}_{FF} = H_{FF,\theta} \vec{a}_\theta + H_{FF,\phi} \vec{a}_\phi = -\frac{1}{\eta_0} E_{FF,\phi} \cdot \vec{a}_\theta + \frac{1}{\eta_0} E_{FF,\theta} \cdot \vec{a}_\phi = -j\omega A_{m,\theta} \cdot \vec{a}_\theta - j\omega A_{m,\phi} \cdot \vec{a}_\phi \end{cases}$$

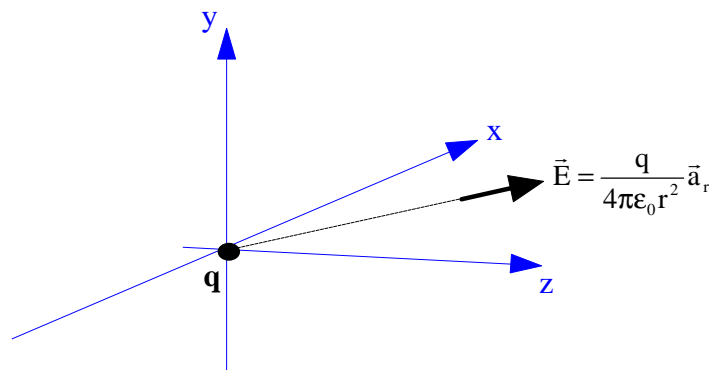
Possiamo dunque applicare la **sovrapposizione degli effetti** e scrivere che il campo totale, in zona lontana, assume la seguente espressione:

$$\begin{cases} \vec{E}_{FF} = -j\omega(A_{e,\theta} + \eta_0 A_{m,\phi}) \cdot \vec{a}_\theta - j\omega(A_{e,\phi} - \eta_0 A_{m,\theta}) \cdot \vec{a}_\phi \\ \vec{H}_{FF} = -\frac{1}{\eta_0} E_{FF,\phi} \cdot \vec{a}_\theta + \frac{1}{\eta_0} E_{FF,\theta} \cdot \vec{a}_\phi \end{cases}$$

## Principio di equivalenza dei campi

Al fine di introdurre i concetti fondamentali che sono alla base del cosiddetto **principio di equivalenza dei campi**, cominciamo da un semplice esempio di campo elettrostatico, generato cioè da cariche statiche.

Consideriamo in particolare una **carica elettrica puntiforme q** situata nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano Oxyz:

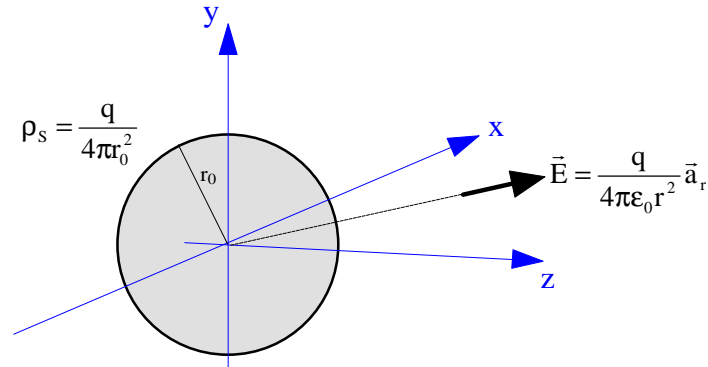


E' noto che il **campo elettrico statico** prodotto da tale carica ha espressione

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{a}_r$$

Consideriamo adesso una superficie sferica di raggio  $r_0$  centrata nella carica  $q$ . Applicando il **teorema di Gauss**, possiamo facilmente dedurre che è possibile ottenere lo stesso campo elettrico nella regione  $r > r_0$  (quindi esternamente alla sfera)

sostituendo la carica  $q$  con una **densità spaziale di carica**  $\rho_s = \frac{q}{4\pi r_0^2}$  distribuita uniformemente sulla sfera stessa: questa densità di carica fornisce l'opportuna terminazione per le linee di forza associate al campo sulla superficie  $r=r_0$ .



Tuttavia, le due situazioni (quella con  $q$  e quella con  $\rho_s$ ) non sono perfettamente equivalenti: lo sono senz'altro per quanto riguarda il campo esterno alla sfera, mentre invece differiscono per quanto riguarda il campo interno alla sfera, che, nel caso di  $\rho_s$ , è identicamente nullo in ogni punto. Diciamo quindi che l'equivalenza tra i due tipi di sorgenti vale solo per il campo esterno alla sfera. Questo è un primo semplice esempio del *principio di equivalenza dei campi*.

Adesso, modifichiamo ulteriormente la situazione, lasciando invariato il campo all'esterno della sfera e *postulando* invece l'esistenza di un campo uniforme  $\vec{E}_1 = E_0 \vec{a}_x$  all'interno della sfera. Per ottenere una distribuzione di campo di questo tipo, dobbiamo necessariamente utilizzare le seguenti sorgenti:

- in base a quanto visto prima, per ottenere il campo  $\vec{E}$  all'esterno della sfera abbiamo bisogno di una densità spaziale di carica  $\rho_s = \frac{q}{4\pi r_0^2}$  distribuita sulla superficie esterna della sfera stessa;
- in secondo luogo, per fare in modo che il campo  $\vec{E}_1$  non intervenga a modificare il suddetto campo  $\vec{E}$ , dobbiamo necessariamente azzerare la sua componente normale alla superficie della sfera: questo lo otteniamo sistemando una nuova densità spaziale di carica sulla sfera, che in base al teorema di Gauss deve valere

$$\rho'_s = -\epsilon_0 \vec{a}_r \cdot \vec{E}_1 = -\epsilon_0 \vec{a}_r \cdot E_0 \vec{a}_x = -\epsilon_0 E_0 (\vec{a}_r \cdot \vec{a}_x) = -\epsilon_0 E_0 \sin \theta \cos \varphi$$

- ancora, dobbiamo anche azzerare il campo elettrico tangenziale all'interno della sfera e questo lo possiamo ottenere ponendo uno **strato di corrente magnetica statica** sulla superficie della sfera. Una superficie su cui scorre uno strato di corrente elettrica con densità  $\vec{J}_{es}$  determina notoriamente una *discontinuità* della componente tangenziale del campo magnetico secondo la relazione  $\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_{es}$ ; allora, sfruttando la "solita" **dualità**, la corrispondente espressione per la discontinuità del campo elettrico tangenziale dovuta ad un foglio di corrente con densità  $\vec{J}_{ms}$  non può che essere  $-\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{J}_{ms}$ ; in particolare, nel nostro caso la normale è  $\vec{a}_r$  ed inoltre il campo esterno (quello

con il pedice “2”) non presenta componente tangenziale (infatti  $\vec{E}$  è solo radiale). Di conseguenza, scriviamo che la densità di corrente magnetica che ci serve è

$$\vec{J}_{ms} = -\vec{n} \times \vec{E}_2 + \vec{n} \times \vec{E}_1 = \vec{n} \times \vec{E}_1 = \vec{n} \times E_0 \vec{a}_x = E_0 (\vec{n} \times \vec{a}_x) = E_0 (\sin \varphi \vec{a}_\theta + \cos \theta \cos \varphi \vec{a}_\varphi)$$

In definitiva, partendo dalla situazione reale iniziale in cui una carica puntiforme  $q$  è posta nell’origine del nostro sistema di riferimento, siamo giunti ad una nuova situazione, in cui un campo elettrico uniforme  $\vec{E}_1 = E_0 \vec{a}_x$  è presente all’interno della sfera di raggio  $r=r_0$  ed un campo radiale  $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{a}_r$  è presente al di fuori della stessa sfera; questa distribuzione di campo è stata ottenuta usando due sorgenti:

- una **carica elettrica statica** sulla sfera, con densità spaziale complessiva data da

$$\rho = \frac{q}{4\pi r_0^2} - \epsilon_0 E_0 \sin \theta \cos \varphi$$

- un **foglio di corrente magnetica** sulla superficie della sfera con densità superficiale

$$\vec{J}_{ms} = -E_0 (\sin \varphi \vec{a}_\theta + \cos \theta \cos \varphi \vec{a}_\varphi)$$

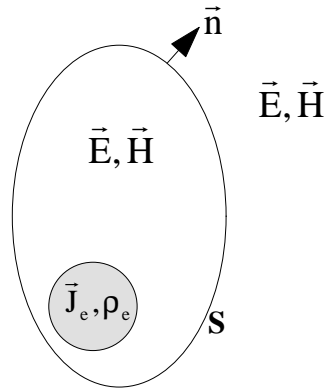
In generale, dunque, abbiamo utilizzato due nuove sorgenti (una carica elettrica statica ed una densità di corrente magnetica) che producono lo stesso campo iniziale per quanto riguarda la regione esterna alla sfera ed un campo  $\vec{E}_1 = E_0 \vec{a}_x$  all’interno della sfera stessa. Di tale campo abbiamo solo *postulato* l’esistenza, senza fare considerazioni sulle sue sorgenti.

Si può verificare facilmente che la distribuzione di carica e di campo che abbiamo realizzato soddisfa le **equazioni di Maxwell**: ad esempio, in ogni punto, eccetto che su  $r=r_0$ , risultano nulli il rotore e la divergenza del campo elettrico.

A questo punto, nessuno ci vieta, ad esempio, di imporre che il campo elettrico  $E_1$  all’interno della sfera sia nullo, il che equivale a considerare una sfera di materiale perfettamente conduttore (metallo), senza per questo modificare il campo  $E$  all’esterno della sfera stessa.

La conclusione da poter evidenziare in questo esempio è che ci sono diverse distribuzioni di sorgenti equivalenti che possono essere disposte su una superficie chiusa che circonda una data sorgente pur mantenendo invariato, rispetto alla situazione di partenza, il campo elettrico al di fuori della superficie stessa. Questi stessi concetti possono anche essere applicati al caso di **campi elettromagnetici variabili nel tempo**, come intendiamo far vedere adesso.

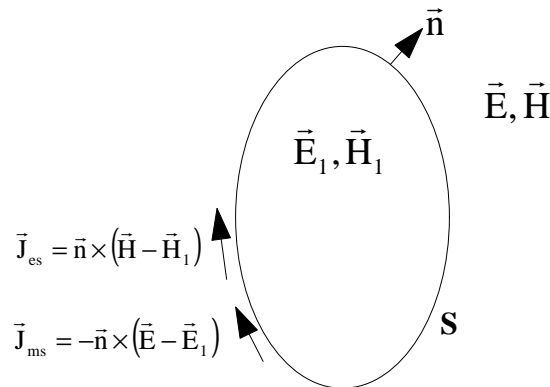
Consideriamo un sistema di sorgenti elettriche  $\vec{J}_e, \rho_e$  contenute in un volume  $V_1$  delimitato da una superficie chiusa  $S$ . Indichiamo con  $\vec{E}, \vec{H}$  il corrispondente campo elettromagnetico irradiato:



Adesso supponiamo di rimuovere le sorgenti  $\vec{J}_e, \rho_e$  e *postuliamo* l'esistenza di un campo  $\vec{E}_1, \vec{H}_1$  all'interno di  $S$  e ancora del campo  $\vec{E}, \vec{H}$  all'esterno di  $S$ . Questo campo elettrico complessivo postulato è una valida soluzione solo se i due campi sono propriamente accoppiati in corrispondenza della superficie  $S$  che li separa. Questo significa che i due campi devono soddisfare le seguenti **condizioni al contorno** relative alle rispettive componenti tangenziali su  $S$ :

$$\begin{cases} \vec{J}_{es} = \vec{n} \times (\vec{H} - \vec{H}_1) \\ \vec{J}_{ms} = -\vec{n} \times (\vec{E} - \vec{E}_1) \end{cases}$$

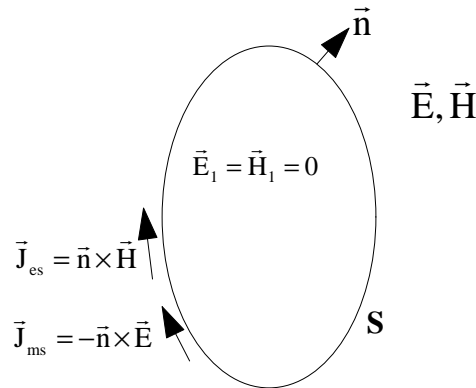
Queste espressioni rappresentano dunque le condizioni al contorno cui devono soddisfare i campi tangenziali in corrispondenza della superficie  $S$ : la discontinuità del campo magnetico tangenziale impone la presenza di un **foglio di corrente elettrica** con densità  $\vec{J}_{es}$ ; la discontinuità del campo elettrico tangenziale impone invece la presenza di un **foglio di corrente magnetica** con densità  $\vec{J}_{ms}$ . E' proprio questo requisito che giustifica l'introduzione delle correnti magnetiche che abbiamo fatto in precedenza.



L'insieme dei campi  $\vec{E}, \vec{H}$  e  $\vec{E}_1, \vec{H}_1$  e delle correnti  $\vec{J}_{es}, \vec{J}_{ms}$  costituisce una valida soluzione delle equazioni di Maxwell in ciascun punto del volume considerato. Dato che la soluzione di tale equazione è unica, quando avremo imposto che tutte le condizioni al contorno siano soddisfatte potremo affermare che sicuramente le correnti  $\vec{J}_{es}, \vec{J}_{ms}$  irradiano i campi postulati. Allora, *se supponiamo di interessarci solo a quello che succede al di fuori della superficie  $S$ , le correnti  $\vec{J}_{es}, \vec{J}_{ms}$  sono del tutto equivalenti all'insieme iniziale di sorgenti  $\vec{J}_e, \rho_e$ .*

Non solo, ma il campo  $\vec{E}_1, \vec{H}_1$  è a nostra completa ed arbitraria scelta, per cui possiamo supporre che esso sia nullo: in questo caso, scriviamo perciò che le **densità di corrente equivalenti** sono date da

$$\begin{cases} \vec{J}_{es} = \vec{n} \times \vec{H} \\ \vec{J}_{ms} = -\vec{n} \times \vec{E} \end{cases}$$



La conclusione cui siamo pervenuti è dunque quella per cui, ai fini del campo irradiato nella regione esterna ad una generica superficie chiusa  $S$  che abbraccia un determinato sistema  $\vec{J}_e, \rho_e$  di sorgenti, si possono sostituire tali sorgenti che delle sorgenti equivalenti  $\vec{J}_{es}, \vec{J}_{ms}$  corrispondenti a correnti che scorrono sulla superficie  $S$  stessa.

Le ultime due equazioni rappresentano la formulazione matematica del cosiddetto **principio di Huygen** e sono note come **principio di equivalenza dei campi di Love**.

Le correnti  $\vec{J}_{es}, \vec{J}_{ms}$  irradiano nello spazio libero ed il campo irradiato può quindi essere calcolato usando il metodo generale riportato in precedenza, basato sulla determinazione dei potenziali vettore di tipo elettrico e di tipo magnetico: si tratterà cioè di usare le relazioni

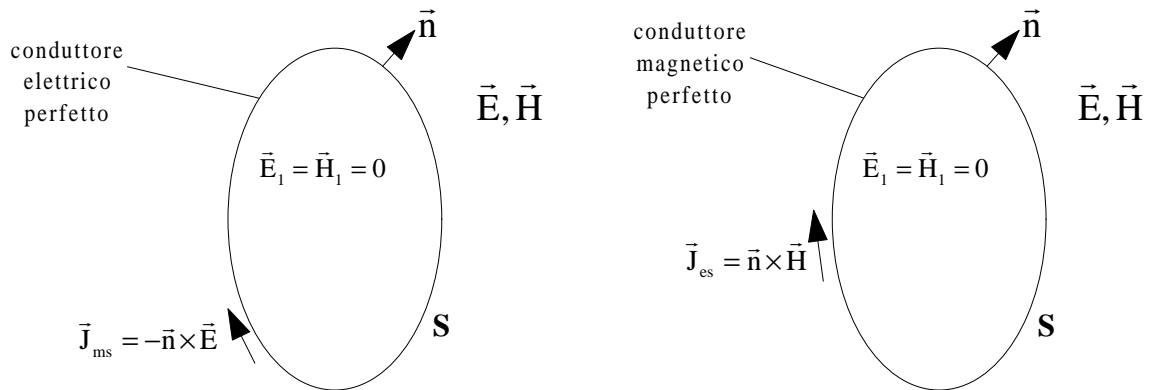
$$\vec{A}_e(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \iiint_{V'} \vec{J}_e(P') e^{jk_0(\vec{r}' \cdot \vec{a}_r)} dV'$$

$$\vec{A}_m(P) = \frac{\epsilon_0}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \iiint_{V'} \vec{J}_m(P') e^{jk_0(\vec{r}' \cdot \vec{a}_r)} dV'$$

Adesso consideriamo due casi particolari:

- se imponiamo che il campo elettromagnetico sia nullo all'interno di  $S$ , possiamo realizzare  $S$  come una **superficie elettrica perfetta**: in questo caso, in base alle proprietà dei conduttori perfetti, le correnti elettriche  $\vec{J}_{es}$  sono cortocircuitate e non irradiano più; di conseguenza, il campo irradiato esternamente ad  $S$  proviene solo dalle correnti magnetiche  $\vec{J}_{ms} = -\vec{n} \times \vec{E}$  poste su  $S$ ; tuttavia, data la presenza di una superficie metallica, non siamo più nello spazio libero e quindi non possiamo più usare le espressioni del potenziale vettore richiamate poco fa;

- in alternativa, possiamo anche sostituire S come una **superficie magnetica perfetta**: in questo caso, sono le correnti magnetiche  $\vec{J}_{ms}$  ad essere cortocircuitate e quindi il campo irradiato proviene solo dalle correnti elettriche  $\vec{J}_{es} = \vec{n} \times \vec{H}$  su S stessa. Anche in questo caso, però, non siamo più in spazio libero e quindi l'espressione del potenziale vettore (in quanto caso quello elettrico) non più quella semplice prima richiamata).



La decisione se considerare S metallizzata o meno dipende essenzialmente dalla **situazione geometrica**: se è favorevole, sceglieremo S metallizzata (ad esempio al fine di applicare il **principio delle immagini** per eliminare il metallo, che si comporta da riflettore, e ricondurci ancora all'irradiazione nello spazio libero), altrimenti sceglieremo diversamente.

E' importante notare che non è necessario imporre alcuna condizione al contorno sulle componenti normali dei campi in corrispondenza di S: infatti, a patto di aver imposto le opportune condizioni al contorno sulle componenti tangenziali, ci pensano le equazioni di Maxwell a garantire che le componenti normali abbiano l'opportuna configurazione su S.

Per le applicazioni che intendiamo trattare nei prossimi paragrafi e che sono relative alla **irradiazione delle antenne ad apertura**, le equazioni che ci interessano sono sostanzialmente quelle che individuano le densità di corrente equivalenti:

$$\begin{aligned}\vec{J}_{es} &= \vec{n} \times (\vec{H} - \vec{H}_1) \\ \vec{J}_{ms} &= -\vec{n} \times (\vec{E} - \vec{E}_1)\end{aligned}$$

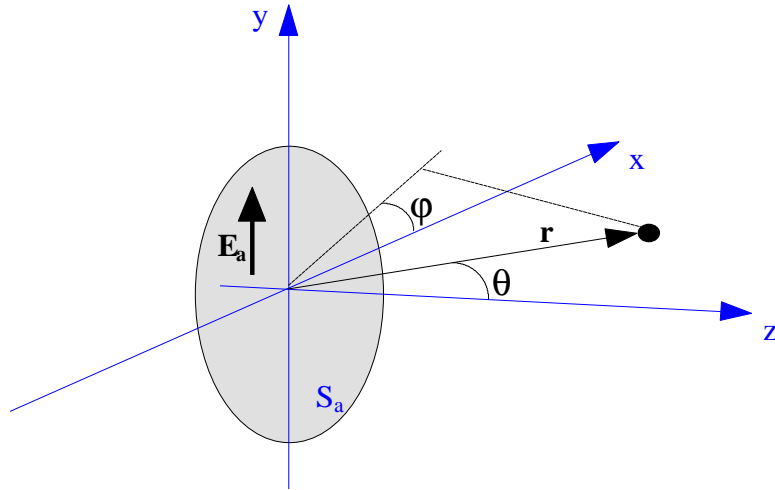
A seconda dei casi, useremo anche la particolarizzazione di queste equazioni al caso in cui il campo  $\vec{E}_1, \vec{H}_1$  interno ad S risulta nullo.

Inoltre, ricordiamo che quelle relazioni sono valide solo sui punti di S, dove S è una superficie geometrica (quindi non reale) che potremo scegliere di volta in volta nel modo per noi più comodo. L'unico requisito cui S deve soddisfare è quello di abbracciare completamente le sorgenti reali del campo.



## Applicazione all'irradiazione delle antenne ad apertura

Consideriamo nuovamente una apertura di forma generica praticata in un piano conduttore, di estensione indefinita e posto in corrispondenza di  $z=0$ , come riportato nella figura seguente:



Indichiamo con  $\vec{E}_a, \vec{H}_a$  il campo in corrispondenza di tale apertura, supposto noto e tangenziale (quindi con componenti solo sul piano  $z=0$ ). Da notare che il campo elettrico è nullo in punti del piano  $z=0$  non appartenenti all'apertura, mentre invece, in generale, il campo magnetico non è necessariamente nullo in tali punti. Usando i discorsi fatti nel precedente paragrafo, possiamo considerare il campo irradiato da questa particolare sorgente considerando le correnti

$$\begin{aligned}\vec{J}_{es} &= \vec{n} \times \vec{H}_a \\ \vec{J}_{ms} &= -\vec{n} \times \vec{E}_a\end{aligned}$$

che fluiscono in corrispondenza dell'apertura.

Possiamo inoltre rimpiazzare l'apertura con un conduttore perfetto, in modo quindi da trovare il campo prodotto dalle sole correnti magnetiche  $\vec{J}_{ms} = -\vec{n} \times \vec{E}_a$ . Non solo, ma possiamo successivamente eliminare il piano conduttore e applicare il **principio delle immagini**, in base al quale il campo totale è quello irradiato da correnti  $2\vec{J}_{ms} = -2\vec{n} \times \vec{E}_a$  che scorrono sulla superficie (adesso metallica) dell'apertura e irradiano nello spazio libero. Alternativamente, possiamo rimpiazzare il piano  $z=0$  tramite un piano composto da conduttore magnetico perfetto, nel qual caso le uniche sorgenti irradianti sono le correnti elettriche  $\vec{J}_{es} = \vec{n} \times \vec{H}_a$ ; potremo così valutare il campo in  $z>0$  rimuovendo lo schermo magnetico e considerando correnti  $2\vec{J}_{es} = 2\vec{n} \times \vec{H}_a$  che irradiano nello spazio libero.

Procediamo, ad esempio, considerando le correnti magnetiche equivalenti  $2\vec{J}_{ms} = -2\vec{n} \times \vec{E}_a$  che irradiano nello spazio libero. Per arrivare all'espressione del campo, sappiamo che il primo passo è quello di calcolare il **potenziale vettore magnetico**, la cui espressione generale è la seguente:

$$\vec{A}_m(\vec{r}) = \frac{\epsilon_0}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \iiint_{V'} \vec{J}_m(P') e^{jk_0(\vec{r}' \cdot \vec{a}_r)} dV'$$

Sostituendo l'espressione  $2\vec{J}_{ms} = -2\vec{n} \times \vec{E}_a$  della distribuzione di corrente (1) e considerando che tale corrente scorre solo in corrispondenza della superficie  $S_a$  dell'apertura (per cui l'integrale non è più genericamente di volume, ma di superficie), scriviamo quanto segue:

$$\vec{A}_m(\vec{r}) = \frac{\epsilon_0}{4\pi r} e^{-jk_0 r} \iint_{S_a} (-2\vec{n} \times \vec{E}_a) e^{jk_0(\vec{r}' \cdot \vec{a}_r)} dS' = -\frac{\epsilon_0}{4\pi r} e^{-jk_0 r} \cdot 2\vec{n} \times \iint_{S_a} \vec{E}_a(x', y') e^{jk_0(\vec{r}' \cdot \vec{a}_r)} dx' dy'$$

Nel nostro caso, la normale da considerare coincide con il versore dell'asse z e, inoltre, il generico punto potenziante P' si trova sul piano [x,y], per cui il vettore  $\vec{r}'$  che lo individua rispetto all'origine del sistema di riferimento manca della componente z (cioè  $\vec{r}' = x'\vec{a}_x + y'\vec{a}_y$ ). Scriviamo perciò che

$$\vec{A}_m(\vec{r}) = -\frac{2\epsilon_0}{4\pi r} e^{-jk_0 r} \cdot \vec{a}_z \times \iint_{S_a} \vec{E}_a(x', y') e^{jk_0(x'\vec{a}_x + y'\vec{a}_y) \cdot \vec{a}_r} dx' dy'$$

Eseguendo adesso i due prodotti scalari presenti nell'esponenziale all'interno dell'integrale, otteniamo

$$(x'\vec{a}_x + y'\vec{a}_y) \cdot \vec{a}_r = x'\vec{a}_x \cdot \vec{a}_r + y'\vec{a}_y \cdot \vec{a}_r = x' \sin \theta \cos \varphi + y' \sin \theta \sin \varphi$$

Scriviamo perciò che

$$\vec{A}_m(\vec{r}) = -\frac{2\epsilon_0}{4\pi r} e^{-jk_0 r} \cdot \vec{a}_z \times \iint_{S_a} \vec{E}_a(x', y') e^{jk_0(x' \sin \theta \cos \varphi + y' \sin \theta \sin \varphi)} dx' dy'$$

A questo punto, possiamo confrontare questa espressione con una di quelle ricavate usando la *tecnica della trasformata di Fourier* e, in particolare, quella che lega il campo elettrico nell'apertura con la funzione che abbiamo indicato con  $\vec{f}_t(k_x, k_y)$ :

$$\vec{f}_t(k_x, k_y) = \iint_{S_a} \vec{E}_a(x, y) e^{jk_x x} e^{jk_y y} dx dy$$

Evidentemente, l'integrale che compare nell'espressione di  $\vec{A}_m(\vec{r})$ , a prescindere dai nomi attribuiti alle variabili di integrazione ( $x'$  al posto di  $x$  e  $y'$  al posto di  $y$ ), corrisponde proprio alla funzione  $\vec{f}_t(k_x, k_y)$  (cioè alla trasformata di Fourier bidimensionale del campo nell'apertura) a patto di porre

$$k_x = k_0 \sin \theta \cos \varphi$$

$$k_y = k_0 \sin \theta \sin \varphi$$

<sup>1</sup> Sottolineiamo che l'uso del termine moltiplicativo 2 corrisponde al fatto che stiamo implicitamente applicando il principio delle immagini, in base al quale abbiamo eliminato il piano metallico e abbiamo considerato la sua azione di riflessione raddoppiando l'entità delle correnti. Solo facendo questa ipotesi è possibile usare l'espressione appena richiamata del potenziale vettore, che è valida solo per irradiazione nello spazio libero (oltre che in zona lontana).

Possiamo perciò scrivere che il potenziale vettore magnetico vale

$$\vec{A}_m(\vec{r}) = -\frac{2\epsilon_0}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \cdot \vec{a}_z \times \vec{f}_t(k_0 \sin \theta \cos \varphi, k_0 \sin \theta \sin \varphi)$$

Adesso, ricordiamoci che  $\vec{f}_t(k_x, k_y)$  è la componente tangenziale della funzione  $\vec{f}(k_x, k_y)$ , il che significa che essa è semplicemente costituita dalla componente x e dalla componente y: quindi

$$\vec{f}_t(k_x, k_y) = f_x(k_x, k_y) \vec{a}_x + f_y(k_x, k_y) \vec{a}_y$$

Eseguiamo allora il prodotto vettoriale con  $\vec{a}_z$ , esprimendo il tutto in coordinate sferiche:

$$\begin{aligned} \vec{a}_z \times \vec{f}_t &= \vec{a}_z \times (f_x \vec{a}_x + f_y \vec{a}_y) = f_x \vec{a}_z \times \vec{a}_x + f_y \vec{a}_z \times \vec{a}_y = f_x \vec{a}_y - f_y \vec{a}_x = \\ &= f_x (\sin \theta \sin \varphi \cdot \vec{a}_r + \cos \theta \sin \varphi \cdot \vec{a}_\theta - \cos \varphi \cdot \vec{a}_\varphi) - f_y (\sin \theta \cos \varphi \cdot \vec{a}_r + \cos \theta \cos \varphi \cdot \vec{a}_\theta - \sin \varphi \cdot \vec{a}_\varphi) \end{aligned}$$

Quindi, in base ai passaggi appena svolti, notiamo che il vettore  $\vec{a}_z \times \vec{f}_t(k_x, k_y)$  presenta, in generale, tutte le componenti:

$$[\vec{A}_m(\vec{r})]_r = -\frac{2\epsilon_0}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \cdot [f_x \sin \varphi - f_y \cos \varphi] \sin \theta$$

$$[\vec{A}_m(\vec{r})]_\theta = -\frac{2\epsilon_0}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \cdot [f_x \sin \varphi - f_y \cos \varphi] \cos \theta$$

$$[\vec{A}_m(\vec{r})]_\varphi = -\frac{2\epsilon_0}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \cdot [f_x \cos \varphi + f_y \sin \varphi]$$

dove ricordiamo che bisogna sempre porre gli argomenti di  $f_x$  e  $f_y$  pari a  $k_x = k_0 \sin \theta \cos \varphi$  e  $k_y = k_0 \sin \theta \sin \varphi$ .

Tuttavia, a noi interessa solo l'**irradiazione in zona lontana** e sappiamo che questa è caratterizzata da un campo privo della componente radiale, secondo le seguenti relazioni (citate all'inizio):

$$\begin{aligned} \vec{E}_{FF} &= -j\omega\eta_0 A_{m,\varphi} \cdot \vec{a}_\theta + j\omega\eta_0 A_{m,\theta} \cdot \vec{a}_\varphi \\ \vec{H}_{FF} &= -\frac{1}{\eta_0} E_{FF,\varphi} \cdot \vec{a}_\theta + \frac{1}{\eta_0} E_{FF,\theta} \cdot \vec{a}_\varphi \end{aligned}$$

Di conseguenza, limitandoci a considerare le componenti  $\theta$  e  $\varphi$  del potenziale vettore, ossia della funzione  $\vec{a}_z \times \vec{f}_t(k_x, k_y)$ , e usando le relazioni appena richiamate, scriviamo che il potenziale vettore in zona lontana è il seguente:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{FF} &= -j\omega\eta_0 A_{m,\varphi} \cdot \vec{a}_\theta + j\omega\eta_0 A_{m,\theta} \cdot \vec{a}_\varphi = \\ &= j\omega\eta_0 \frac{2\varepsilon_0}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \cdot [f_X \cos \varphi + f_Y \sin \varphi] \cdot \vec{a}_\theta - j\omega\eta_0 \frac{2\varepsilon_0}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \cdot [f_X \sin \varphi - f_Y \cos \varphi] \cos \theta \cdot \vec{a}_\varphi = \\ &= j \frac{\omega\eta_0 \varepsilon_0}{2\pi} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \cdot [(f_X \cos \varphi + f_Y \sin \varphi) \cdot \vec{a}_\theta + (f_Y \cos \varphi - f_X \sin \varphi) \cos \theta \cdot \vec{a}_\varphi]\end{aligned}$$

Osservando che  $\omega\eta_0\varepsilon_0 = k_0$ , si vede immediatamente che questa è esattamente la stessa espressione del campo elettrico lontano trovata con la tecnica di Fourier, a ulteriore testimonianza del fatto che le sorgenti equivalenti sono un utile e corretto strumento di analisi:

$$\boxed{\vec{E}_{FF} = j \frac{k_0}{2\pi} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \cdot [(f_X \cos \varphi + f_Y \sin \varphi) \cdot \vec{a}_\theta + (f_Y \cos \varphi - f_X \sin \varphi) \cos \theta \cdot \vec{a}_\varphi]}$$

Possiamo adesso facilmente ripetere il discorso considerando le **correnti elettriche equivalenti**: dobbiamo cioè ipotizzare che il campo sia irradiato dalle sorgenti  $2\vec{J}_{es} = 2\vec{n} \times \vec{H}_a$  che irradiano nello spazio libero.

Per prima cosa, applicando la definizione generale di **potenziale vettore elettrico**, dobbiamo scrivere che

$$\vec{A}_e(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \iiint_{V'} \vec{J}_{es}(P') e^{jk_0(\vec{r}' \cdot \vec{a}_r)} dV'$$

In modo analogo a quanto fatto prima, considerando che le sorgenti sono distribuite su una superficie, l'integrale diventa un integrale di superficie e, ripetendo gli stessi discorsi fatti prima, abbiamo in particolare che

$$\begin{aligned}\vec{A}_e(P) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \iint_{S_a} 2\vec{J}_{es}(x', y') e^{jk_0(\vec{r}' \cdot \vec{a}_r)} dx' dy' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \iint_{S_a} 2\vec{n} \times \vec{H}_a e^{jk_0(\vec{r}' \cdot \vec{a}_r)} dx' dy' = \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \vec{n} \times \iint_{S_a} \vec{H}_a(x', y') e^{jk_0(\vec{r}' \cdot \vec{a}_r)} dx' dy' = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \vec{a}_r \times \iint_{S_a} \vec{H}_a(x', y') e^{jk_0(x' \sin \theta \cos \varphi + y' \sin \theta \sin \varphi)} dx' dy'\end{aligned}$$

A questo punto, data la perfetta analogia con quanto abbiamo fatto nel caso delle sorgenti magnetiche, possiamo risparmiarci ulteriori passaggi analitici e riportare direttamente il risultato finale: difatti, ponendo

$$g_t(k_x, k_y) = \iint_{S_a} \vec{H}_a(x', y') e^{jk_0(x' \sin \theta \cos \varphi + y' \sin \theta \sin \varphi)} dx' dy'$$

e

$$k_x = k_0 \sin \theta \cos \varphi$$

$$k_y = k_0 \sin \theta \sin \varphi$$

è intuitivo comprendere che il campo elettrico irradiato in zona lontana (considerando perciò solo le componenti  $\theta$  e  $\varphi$ ) dalle correnti elettriche  $2\vec{J}_{es} = 2\vec{n} \times \vec{H}_a$  assume la seguente espressione:

$$\vec{E}_{FF} = j \frac{k_0 \eta_0}{2\pi r} e^{-jk_0 r} \cdot [(g_Y \cos \varphi - g_X \sin \varphi) \cos \theta \cdot \vec{a}_\theta - (g_X \cos \varphi + g_Y \sin \varphi) \cdot \vec{a}_\varphi]$$

dove naturalmente  $g_X(k_X, k_Y)$  e  $g_Y(k_X, k_Y)$  sono le due componenti cartesiane della funzione  $g_t(k_X, k_Y)$  e vanno implicitamente calcolate con le espressioni riportate poco fa di  $k_X$  e  $k_Y$ .

Infine, l'ultimo caso da considerare è quello in cui agiscono contemporaneamente sia le correnti magnetiche sia quelle elettriche: in questo caso, non dobbiamo dunque usare alcun piano metallico, il che significa che non va neanche applicato il principio delle immagini e quindi che le sorgenti radianti sono  $\vec{J}_{es} = \vec{n} \times \vec{H}_a$  e  $\vec{J}_{ms} = -\vec{n} \times \vec{E}_a$ . Sfruttando anche in questo caso l'analogia con i due casi precedenti, possiamo immediatamente dedurre i risultati finali. In particolare, a scopo riepilogativo, riportiamo le singole componenti del campo elettrico per tutti e tre i casi presi in considerazione:

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{l} \vec{J}_{es} = \vec{n} \times \vec{H}_a \\ \vec{J}_{ms} = -\vec{n} \times \vec{E}_a \end{array} \right] &\rightarrow \begin{aligned} \vec{E}_{\theta,FF} &= j \frac{k_0}{4\pi r} e^{-jk_0 r} \cdot [(f_X \cos \varphi + f_Y \sin \varphi) + \eta_0 (g_Y \cos \varphi - g_X \sin \varphi) \cos \theta] \cdot \vec{a}_\theta \\ \vec{E}_{\varphi,FF} &= j \frac{k_0}{4\pi r} e^{-jk_0 r} \cdot [(f_Y \cos \varphi - f_X \sin \varphi) \cos \theta - \eta_0 (g_X \cos \varphi + g_Y \sin \varphi)] \cdot \vec{a}_\varphi \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\left[ 2\vec{J}_{ms} = -2\vec{n} \times \vec{E}_a \right] \rightarrow \begin{aligned} \vec{E}_{\theta,FF} &= j \frac{k_0}{2\pi r} e^{-jk_0 r} \cdot (f_X \cos \varphi + f_Y \sin \varphi) \cdot \vec{a}_\theta \\ \vec{E}_{\varphi,FF} &= j \frac{k_0}{2\pi r} e^{-jk_0 r} \cdot (f_Y \cos \varphi - f_X \sin \varphi) \cos \theta \cdot \vec{a}_\varphi \end{aligned}$$

$$\left[ 2\vec{J}_{es} = 2\vec{n} \times \vec{H}_a \right] \rightarrow \begin{aligned} \vec{E}_{\theta,FF} &= j \frac{k_0 \eta_0}{2\pi r} e^{-jk_0 r} \cdot (g_Y \cos \varphi - g_X \sin \varphi) \cos \theta \cdot \vec{a}_\theta \\ \vec{E}_{\varphi,FF} &= -j \frac{k_0 \eta_0}{2\pi r} e^{-jk_0 r} \cdot (g_X \cos \varphi + g_Y \sin \varphi) \cdot \vec{a}_\varphi \end{aligned}$$

Si può notare facilmente che la prima soluzione, quella in presenza di correnti sia elettriche sia magnetiche, è semplicemente la somma delle altre due soluzioni. Se il campo nell'apertura è noto con esattezza, allora tutte e tre le soluzioni (e relative procedure) sono valide e danno lo stesso campo finale. Al contrario, quando il campo nell'apertura è noto solo con una certa approssimazione, allora in generale le tre soluzioni danno risultati diversi. In questi casi, è evidente che conviene usare o la soluzione relativa alle sole correnti magnetiche o quella relativa alle sole correnti elettriche, in quanto nell'un caso e nell'altro basta conoscere solo il campo elettrico o quello magnetico e non entrambi. Viceversa, ci sono casi in cui il principio delle immagini non è applicabile (ad esempio quando l'apertura è praticata su una superficie curva) e quindi è obbligatorio scegliere la soluzione con entrambe le correnti operative.

## Osservazione

Abbiamo in precedenza richiamato l'attenzione sul fatto che, una volta individuate le sorgenti del campo da calcolare in termini di correnti (reali o equivalenti), il primo passo, verso la valutazione del campo, è sempre il calcolo dei potenziali vettori, secondo le relazioni

$$\vec{A}_e(\mathbf{P}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \iiint_{V'} \vec{J}_{es}(\mathbf{P}') e^{jk_0(\vec{r}' \cdot \vec{a}_r)} dV' \quad \text{dove } \vec{J}_{es} = \vec{n} \times \vec{H}_a$$

$$\vec{A}_m(\mathbf{P}) = \frac{\epsilon_0}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \iiint_{V'} \vec{J}_{ms}(\mathbf{P}') e^{jk_0(\vec{r}' \cdot \vec{a}_r)} dV' \quad \text{dove } \vec{J}_{ms} = -\vec{n} \times \vec{E}_a$$

Nel caso di densità di corrente di tipo superficiale, i due integrali da calcolare sono integrali di superficie: allora, queste due relazioni mostrano sostanzialmente che un generico elemento di superficie  $dS'$ , con normale unitaria  $\vec{n}$ , sul quale è localizzato un campo  $\vec{E}_a(\vec{r}), \vec{H}_a(\vec{r})$ , fornisce un contributo ai potenziali vettore dato da

$$d\vec{A}_e(\mathbf{P}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \vec{n} \times \vec{H}_a(\vec{r}') e^{jk_0(\vec{r}' \cdot \vec{a}_r)} dS'$$

$$d\vec{A}_m(\mathbf{P}) = -\frac{\epsilon_0}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \vec{n} \times \vec{E}_a(\vec{r}') e^{jk_0(\vec{r}' \cdot \vec{a}_r)} dS'$$

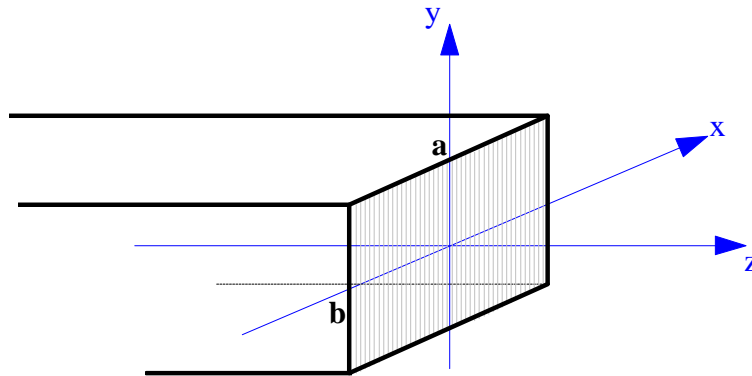
Allora, il calcolo del campo irradiato da una apertura praticata su una superficie ad esempio di un cilindro o di una sfera risulta più difficile di quello relativo ad una apertura su un piano conduttore.

La formulazione usata di solito è quello di chiudere l'apertura con un conduttore perfetto e porre su di esso un foglio di corrente magnetica con densità  $\vec{J}_{ms} = -\vec{n} \times \vec{E}_a$ . Il campo irradiato può essere trovato in base a tale foglio di corrente, ma deve anche rispondere al requisito per cui il termine  $\vec{n} \times \vec{E}$  deve essere nullo sulla superficie conduttiva.

## Guida d'onda rettangolare troncata

Le **guide d'onda troncate**, circolari o rettangolari, non sono normalmente usate come antenne di per se stesse in quanto hanno direttività molto bassa. Tuttavia, esse sono spesso usate come **alimentazione primaria** per illuminare un *riflettore parabolico*, per cui vale comunque la pena studiare le loro caratteristiche di radiazione.

La figura seguente mostra una **guida rettangolare**, di dimensioni  $a$  e  $b$ , che termina con la propria apertura sul piano  $z=0$  del sistema di riferimento prescelto:



In una guida di questo tipo, il **modo di propagazione dominante** risulta essere il **TE<sub>10</sub>** (trasverso elettrico), che presenta la componente  $y$  del campo elettrico e le componenti  $x$  e  $z$  del magnetico. Nel piano ortogonale alla direzione di propagazione (asse  $z$ ), abbiamo perciò due componenti di campo, elettrico lungo  $y$  e magnetico lungo  $x$ . In particolare, le rispettive espressioni risultano essere le seguenti:

$$E_y(x, z) = E_0 \cos \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z}$$

$$H_x(x, z) = -\frac{E_0}{\eta_w} \cos \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z}$$

dove la **costante di propagazione** del modo è  $\beta = \sqrt{k_0^2 - \frac{\pi^2}{a^2}}$ , mentre invece

l'**impedenza d'onda** del modo considerato è data da  $\eta_w = \frac{k_0 \eta_0}{\beta}$ .

Se andiamo allora a considerare tali componenti di campo in corrispondenza di  $z=0$ , ossia in corrispondenza dell'apertura, otteniamo evidentemente

$$E_y(x, 0) = E_0 \cos \frac{\pi x}{a}$$

$$H_x(x, 0) = -\frac{E_0}{\eta_w} \cos \frac{\pi x}{a}$$

Entrambi questi campi hanno evidentemente un andamento cosinusoidale lungo  $x$ , mentre sono indipendenti da  $y$ .

Dobbiamo ora chiederci se queste sono le uniche componenti del campo in corrispondenza dell'apertura (ossia quindi il campo che abbiamo sempre indicato con

$\vec{E}_a, \vec{H}_a$  in precedenza), oppure c'è da considerare qualcos'altro. La risposta è intuitiva: il fatto di aver troncato la guida in  $z=0$  determina la nascita di un *modo dominante* riflesso oltre che di *ulteriori modi* di minore ampiezza. Ipotizzando di riuscire ad azzerare tutti questi modi indesiderati ed ipotizzando inoltre che, al di là dell'apertura, le componenti  $x$  ed  $y$  di campo siano trascurabili, possiamo in prima approssimazione affermare che quello prima riportato sia proprio il campo  $\vec{E}_a, \vec{H}_a$  :

$$\begin{aligned} \vec{E}_a(x) &= E_y(x,0)\vec{a}_y = E_0 \cos \frac{\pi x}{a} \vec{a}_y \\ \vec{H}_a(x) &= H_x(x,0)\vec{a}_x = -\frac{E_0}{\eta_w} \cos \frac{\pi x}{a} \vec{a}_x \end{aligned}$$

Questa approssimazione, nella pratica, fornisce una stima sufficientemente accettabile del lobo principale di radiazione, mentre invece la stima peggiore per quanto riguarda i lobi secondari. Nelle applicazioni delle guide d'onde come alimentatori di riflettori parabolici, l'influenza dei lobi secondari viene generalmente messa in secondo piano, per cui le ipotesi fatte prima risultano ragionevoli.

A questo punto, quindi, possiamo disinteressarci della presenza della guida d'onda, riconducendoci ancora una volta alla presenza di una apertura rettangolare sede di un campo tangenziale  $\vec{E}_a, \vec{H}_a$  del tipo individuato poco fa. Utilizziamo il metodo delle correnti equivalenti, le cui espressioni generali sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \vec{J}_{es} &= \vec{n} \times (\vec{H}_{est} - \vec{H}_{int}) \\ \vec{J}_{ms} &= -\vec{n} \times (\vec{E}_{est} - \vec{E}_{int}) \end{aligned}$$

Cominciamo dalle **correnti magnetiche**; in primo luogo, possiamo scegliere  $\vec{E}_{int} = 0$ , dato che il valore di questo campo è a nostro completo arbitrio. Otteniamo perciò che la sorgente irradiante è

$$\vec{J}_{ms} = -\vec{n} \times \vec{E}$$

dove ovviamente  $\vec{E}$  è il campo effettivo presente sulla superficie considerata: si tratta cioè di  $\vec{E}_a$  (che è diretto lungo  $y$ ), per cui scriviamo che

$$\vec{J}_{ms} = -\vec{n} \times \vec{E}_a = -\vec{a}_z \times E_y(x,0)\vec{a}_y = E_y(x,0)\vec{a}_x = E_0 \cos \frac{\pi x}{a} \vec{a}_x$$

Con procedimento assolutamente analogo, è evidente che le **correnti elettriche** sono date da

$$\vec{J}_{es} = \vec{n} \times \vec{H}_a = \vec{a}_z \times H_x(x,0)\vec{a}_x = H_x(x,0)\vec{a}_y = -\frac{E_0}{\eta_w} \cos \frac{\pi x}{a} \vec{a}_y$$

Dato che la situazione geometrica in esame consente l'applicazione del **principio delle immagini**, possiamo scegliere l'una o l'altro tipo di sorgente come operante da sola. Consideriamo ad esempio solo le correnti magnetiche, il che equivale a prendere un piano metallico perfettamente conduttore, in modo da cortocircuitare le correnti elettriche. Eliminando tale piano metallico e raddoppiando le correnti, siamo di nuovo in spazio libero e possiamo perciò applicare le formule trovate nel paragrafo precedente, ossia



$$\begin{aligned}\vec{E}_{\theta,FF} &= j \frac{k_0}{2\pi} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \cdot (f_X \cos \varphi + f_Y \sin \varphi) \cdot \vec{a}_\theta \\ \vec{E}_{\varphi,FF} &= j \frac{k_0}{2\pi} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \cdot (f_Y \cos \varphi - f_X \sin \varphi) \cos \theta \cdot \vec{a}_\varphi\end{aligned}$$

Dobbiamo evidentemente calcolare le due funzioni  $f_X(k_X, k_Y)$  e  $f_Y(k_X, k_Y)$ , avendo cura poi di porre i loro argomenti pari a  $k_X = k_0 \sin \theta \cos \varphi$  e  $k_Y = k_0 \sin \theta \sin \varphi$ . Ricordiamoci allora che le suddette funzioni sono le componenti x ed y della funzione

$$\vec{f}_l(k_X, k_Y) = \iint_{S_a} \vec{E}_a(x, y) e^{jk_X x} e^{jk_Y y} dx dy$$

In base a questa espressione,  $f_X(k_X, k_Y)$  dipende dalla componente x del campo in corrispondenza dell'apertura ed è quindi nulla in quanto il suddetto campo è diretto lungo y. Per quanto riguarda invece  $f_Y(k_X, k_Y)$ , che dipende dalla componente y del campo in corrispondenza dell'apertura, abbiamo quanto segue:

$$\begin{aligned}\vec{f}_Y(k_X, k_Y) &= \iint_{S_a} \vec{E}_{aX}(x, y) e^{jk_X x} e^{jk_Y y} dx dy = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} E_0 \cos \frac{\pi x}{a} \vec{a}_Y e^{jk_X x} e^{jk_Y y} dx dy = \\ &= \vec{a}_Y E_0 \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} \cos \frac{\pi x}{a} e^{jk_X x} e^{jk_Y y} dx dy = \dots = 2\pi ab E_0 \frac{\sin\left(k_Y \frac{b}{2}\right) \cos\left(k_X \frac{a}{2}\right)}{k_Y \frac{b}{2} \pi^2 - (k_X a)^2} \vec{a}_Y\end{aligned}$$

Sostituendo a  $k_X = k_0 \sin \theta \cos \varphi$  e  $k_Y = k_0 \sin \theta \sin \varphi$  come preannunciato, otteniamo che

$$\vec{f}_Y(k_X, k_Y) = 2\pi ab E_0 \frac{\sin\left(k_0 \sin \theta \sin \varphi \frac{b}{2}\right) \cos\left(k_0 \sin \theta \cos \varphi \frac{a}{2}\right)}{k_0 \sin \theta \sin \varphi \frac{b}{2} \pi^2 - (k_0 \sin \theta \cos \varphi a)^2} \vec{a}_Y$$

da cui quindi scaturisce che il campo elettrico irradiato in zona lontana vale

$$\begin{aligned}\vec{E}_{FF} &= j \frac{k_0}{2\pi} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \cdot [f_Y \sin \varphi \cdot \vec{a}_\theta + f_Y \cos \varphi \cos \theta \cdot \vec{a}_\varphi] = \\ &= j ab E_0 k_0 \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \cdot \frac{\sin\left(k_0 \sin \theta \sin \varphi \frac{b}{2}\right) \cos\left(k_0 \sin \theta \cos \varphi \frac{a}{2}\right)}{k_0 \sin \theta \sin \varphi \frac{b}{2} \pi^2 - (k_0 \sin \theta \cos \varphi a)^2} \cdot [\sin \varphi \cdot \vec{a}_\theta + \cos \varphi \cos \theta \cdot \vec{a}_\varphi]\end{aligned}$$

Vediamo allora di studiare rapidamente questo campo nei vari piani. Ad esempio, consideriamo il piano [y,z], corrispondente a  $\varphi = \pi/2$ : è evidente che la componente  $\varphi$  scompare, mentre invece la componente  $\theta$  assume l'espressione

$$\vec{E}_{\theta,FF} = jabE_0k_0 \frac{e^{-jk_0r}}{r} \cdot \frac{\sin\left(k_0 \sin\theta \frac{b}{2}\right)}{k_0 \sin\theta \frac{b}{2}} \frac{1}{\pi^2} \cdot \vec{a}_\theta$$

Questa funzione è assolutamente analoga a quella del pattern di radiazione di una apertura illuminata uniformemente da un campo diretto lungo y. E' la classica funzione nella forma  $\sin(x)/x$ : basta infatti porre  $v = k_0 \sin\theta \frac{b}{2}$  per ottenere un modulo pari a

$$|\vec{E}_{\theta,FF}| = \frac{abE_0k_0}{r\pi^2} \cdot \left| \frac{\sin(v)}{v} \right|$$

Valgono perciò le stesse considerazioni fatte in quel caso, a proposito ad esempio dell'apertura del fascio: infatti, dato che la funzione  $\left| \frac{\sin(v)}{v} \right|$  presenta il suo primo zero in  $v = \pm\pi$ , abbiamo che

$$v_z = k_0 \frac{b}{2} \sin\theta_z = \pi \longrightarrow \theta_z = \arcsin\left(\frac{2\pi}{k_0b}\right) \longrightarrow \Delta\Psi = 2\theta_z = 2\arcsin\left(\frac{2\pi}{k_0b}\right)$$

Dato che  $k = 2\pi/\lambda$ , dove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda di lavoro, concludiamo che

$$\boxed{\Delta\Psi_{yz} = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{\lambda}{b}\right)}$$

Se invece consideriamo il piano  $[x,z]$ , corrispondente a  $\varphi = 0$ , è evidente che rimane solo la componente  $\varphi$ , con espressione

$$\vec{E}_{\varphi,FF} = jabE_0k_0 \frac{e^{-jk_0r}}{r} \cdot \frac{\cos\left(k_0 \sin\theta \frac{a}{2}\right)}{\pi^2 - (k_0 \sin\theta a)^2} \cdot \cos\theta \cdot \vec{a}_\varphi$$

In questo caso, se poniamo  $u = k_0 \sin\theta \frac{a}{2}$ , otteniamo

$$|\vec{E}_{\varphi,FF}| = \frac{abE_0k_0}{r} \cdot \left| \frac{\cos(u)}{\pi^2 - (2u)^2} \right| \cdot |\cos\theta|$$

Abbiamo dunque qualcosa di diverso rispetto a quanto si ottiene per l'apertura illuminata uniformemente, dove il campo era ancora proporzionale ad un termine del tipo  $\sin(x)/x$ : infatti, la funzione  $\left| \frac{\cos(u)}{\pi^2 - (2u)^2} \right|$  assomiglia anch'essa a  $\left| \frac{\sin(v)}{v} \right|$ , con la differenza però di un lobo principale più ampio (i primi due zeri sono in  $\pm 3\pi/2$  anziché in  $\pm\pi$ ) e più basso e di uno smorzamento più rapido e netto dei lobi secondari. A questa funzione bisogna poi aggiungere anche il **fattore di**

**modulazione**  $|\cos\theta|$ : esso fa sì che, ad esempio, nel piano  $z=0$  (corrispondente a  $\theta=\pi/2$ ), la componente  $\varphi$  del campo scompare.

Anziché scendere nei dettagli analitici dell'andamento del campo, riportiamo i risultati più importanti. Per farlo, teniamo conto che l'apertura  $ab$  di una guida d'onda rettangolare è generalmente piccola in termini di lunghezze d'onda. Per esempio, nella cosiddetta **banda X** (che va da 8 a 12 GHz), la lunghezza d'onda varia tra 2.5 cm e 3.75 cm, mentre le guide d'onda standard **WR-90** hanno dimensioni  $a=2.29$  cm e  $b=1.02$  cm. In conseguenza di ciò, l'ampiezza del lobo principale è elevata e la direttività è piccola. Consideriamo ad esempio  $\lambda=3$ cm (corrispondente a 10 GHz):

- nel piano  $\varphi=\pi/2$  e, in particolare, nello spazio del visibile relativo a tale piano, non cade nessuno zero della funzione  $\left| \frac{\sin(v)}{v} \right|$ , a conferma della elevata ampiezza del fascio;
- analogamente, nel piano  $\varphi=0$  e, in particolare, nel suo spazio del visibile, il primo zero della funzione  $\left| \frac{\cos(u)}{\pi^2 - (2u)^2} \right|$ , che si trova in  $\pm 3\pi/2$ , compare solo se  $\lambda > 2a/3$ .

Andiamo ora a valutare la direttività dell'antenna. Per far questo, cominciamo a calcolare la **potenza totale irradiata**, che in questo caso possiamo comodamente calcolare integrando il vettore di Poynting direttamente sull'apertura (il che ci consente di usare le espressioni del campo sull'apertura stessa, che sono senz'altro più semplici di quelle del campo irradiato a distanza generica  $r$ ): abbiamo che

$$P_{\text{irr}} = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{1}{\eta_w} E_0^2 \left( \cos \frac{\pi x}{a} \right)^2 dy dx = \dots \frac{ab}{4} \frac{E_0^2}{\eta_w}$$

L'**intensità massima di radiazione** (cioè la massima potenza radiata per unità di angolo solido) lungo la direzione dell'asse  $z$  risulta invece pari a

$$I_{\text{max}} = \frac{1}{2} \frac{|E_{\theta, \text{FF}}|^2}{\eta_0} r^2 = \dots = \frac{k_0^2 E_0^2 (ab)^2}{\eta_0 \cdot 2\pi^4}$$

dove naturalmente abbiamo utilizzato l'espressione dei campi irradiati e non di quelli sull'apertura, visto che adesso siamo a distanza generica  $r$  dall'apertura stessa.

In tal modo, possiamo concludere che la **direttività** vale

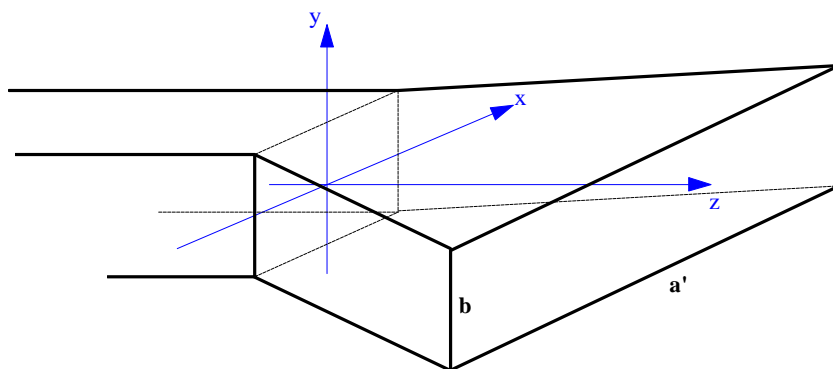
$$D = \frac{4\pi \cdot I_{\text{max}}}{P_{\text{irr}}} = \frac{4\pi \cdot \frac{k_0^2 E_0^2 (ab)^2}{\eta_0 \cdot 2\pi^4}}{\frac{ab E_0^2}{4 \eta_w}} = \frac{4 \eta_w (ab)}{15 \lambda \pi^2}$$

Per una guida d'onda WR-90 e per una lunghezza d'onda di 3 cm, si ottiene  $D=3.5$ .

## Antenne a tromba

La **guida d'onda troncata** descritta nel paragrafo precedente presenta un fascio non molto stretto. Al fine di restringerlo, si può pensare di modificare leggermente la guida d'onda, allargandola, in una o entrambe le direzioni del piano  $[x,y]$  ortogonale al suo asse, nella sua parte finale, realizzando la cosiddetta **antenna a tromba** (*horn antennas*).

A seconda di quale direzione venga scelta per l'allargamento, si hanno tre tipi diversi di antenne a tromba. Ad esempio, nella figura seguente è riportato ciò che si ottiene allargando la guida lungo l'asse  $x$ , ossia passando da una dimensione  $a$  ad una dimensione  $a' > a$  lungo la suddetta direzione:



Questa è una cosiddetta **H-plane horn antenna**, in quanto l'allargamento è avvenuto lungo la direzione parallela al campo magnetico guidato dalla struttura.

Il campo elettromagnetico in corrispondenza di  $z=0$ , ossia all'estremità della parte rettangolare, è ancora approssimativamente quello descritto nel paragrafo precedente: dato che, in generale, all'interno della guida risulta

$$E_y(x,z) = E_0 \cos \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z}$$

$$H_x(x,z) = -\frac{E_0}{\eta_w} \cos \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z}$$

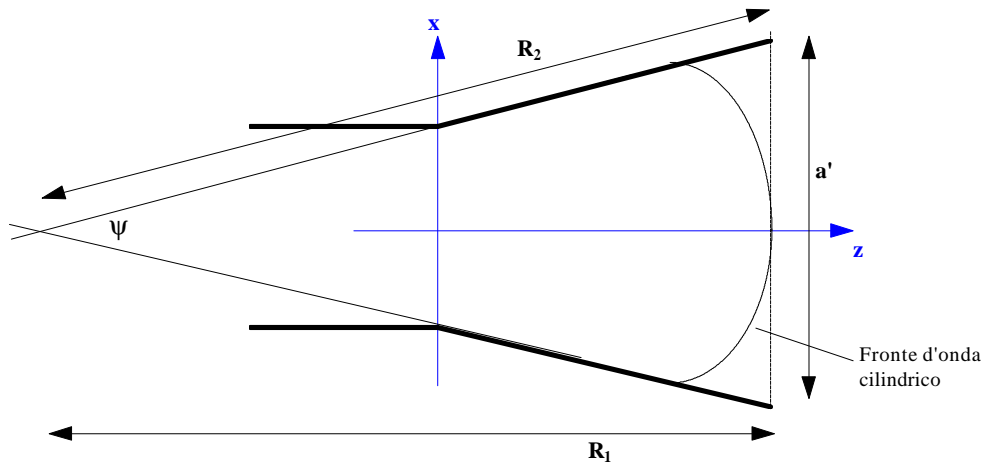
il campo in corrispondenza di  $z=0$  è evidentemente dato da

$$E_y(x,0) = E_0 \cos \frac{\pi x}{a}$$

$$H_x(x,0) = -\frac{E_0}{\eta_w} \cos \frac{\pi x}{a}$$

In base a queste espressioni, in corrispondenza dell'apertura il campo ha modulo variabile solo lungo  $x$ , mentre invece la fase è ovunque costante e nulla. Più in generale, i fronti a fase costante sono piani ortogonali all'asse  $z$ , ossia paralleli al piano  $[x,y]$  su cui si trova l'apertura.

Se adesso però consideriamo il campo all'interno della parte allargata e, in particolare, in corrispondenza della nuova apertura, le cose cambiano:



La nuova configurazione della struttura guidante fa sì che i fronti a fase costante non siano più dei piani ortogonali all'asse x, ma degli archi di circonferenza, come illustrato nella figura (si parla di **fronti d'onda cilindrici**). Di conseguenza, nel piano dell'apertura non abbiamo più un campo a fase costante, ma un campo a fase variabile. Possiamo allora facilmente valutare la differenza di fase tra i due punti estremi dell'apertura, cioè tra  $x=a'/2$  e  $x=-a'/2$ . Ad esempio, con riferimento alla figura appena disegnata, possiamo valutare la variazione di fase come

$$\Delta = k_0(R_2 - R_1)$$

dove si è tenuto conto che la propagazione del campo avviene secondo il classico termine  $\frac{e^{-jk_0r}}{r}$ .

A questo punto, per avere sull'apertura un campo a fase praticamente costante, dobbiamo imporre che quella variazione di fase sia la più piccola possibile. In particolare, si è trovato che il guadagno e il pattern di radiazione dell'antenna sono molto simili a quelli dell'apertura illuminata uniformemente a patto che quella variazione di fase non sia superiore a  $\pi/4$ : la condizione da imporre è dunque

$$\Delta \leq \frac{\pi}{4}$$

Sostituendo l'espressione di  $\Delta$  nonché quella di  $k_0$  e applicando alcune semplici considerazioni geometriche al fine di esplicitare  $R_1$  ed  $R_2$  in funzione di  $a'$  e dell'angolo  $\psi$ , abbiamo quanto segue:

$$k_0(R_2 - R_1) \leq \frac{\pi}{4} \longrightarrow \frac{2\pi}{\lambda} \left( R_2 - R_2 \cos \frac{\psi}{2} \right) \leq \frac{\pi}{4} \longrightarrow \frac{a'}{2 \sin \frac{\psi}{2}} \left( 1 - \cos \frac{\psi}{2} \right) \leq \frac{\lambda}{8}$$

Con ulteriori manipolazioni algebriche, si ricava che questa condizione equivale più semplicemente a

$$\tan \frac{\psi}{4} \leq \frac{\lambda}{4a'}$$

dove ovviamente  $\lambda$  è la frequenza centrale di lavoro.

In base a questa espressione, possiamo andare a studiare l'andamento del massimo valore tollerabile per l'angolo  $\psi$  in funzione del rapporto  $a'/\lambda$ . Un simile studio mostra che, per avere una apertura larga (cioè  $a' \gg \lambda$ ), l'angolo  $\psi$  deve essere piccolo, il che si traduce nell'aver una antenna molto lunga. Proprio questo fatto limita l'applicazione di questo tipo di antenne a quei casi in cui è richiesto un modesto guadagno, per i quali è generalmente sufficiente avere un valore di  $a'$  dell'ordine di una decina di lunghezze d'onda.

Ad ogni modo, quando la variazione di fase del campo nell'apertura viene resa piccola, la distribuzione del campo sull'apertura stessa può essere ritenuta coincidente con quella del modo  $TE_{10}$  della guida d'onda di ingresso, il che significa ipotizzare ancora una volta che

$$\begin{aligned} \vec{E}_a(x) &= E_0 \cos \frac{\pi x}{a} \vec{a}_y \\ \vec{H}_a(x) &= -\frac{E_0}{\eta_w} \cos \frac{\pi x}{a} \vec{a}_x \end{aligned} \quad |x| \leq a'/2, \quad |y| \leq b/2$$

(queste espressioni sono valide nell'ipotesi che il piano  $z=0$  coincida con il piano dell'apertura, per cui abbiamo implicitamente compiuto un cambio del sistema di riferimento rispetto alle figure prima considerate).

Di conseguenza, anche il campo irradiato in zona lontana è lo stesso visto per la guida rettangolare, con ovviamente la differenza di sostituire  $a$  con  $a'$ : scriviamo perciò che il campo elettrico in zona lontana vale

$$\begin{aligned} \vec{E}_{FF} &= j \frac{k_0}{2\pi} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \cdot [f_y \sin \varphi \cdot \vec{a}_\theta + f_y \cos \varphi \cos \theta \cdot \vec{a}_\phi] = \\ &= ja'bE_0 k_0 \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \cdot \frac{\sin \left( k_0 \sin \theta \sin \varphi \frac{b}{2} \right)}{k_0 \sin \theta \sin \varphi \frac{b}{2}} \frac{\cos \left( k_0 \sin \theta \cos \varphi \cdot \frac{a'}{2} \right)}{\pi^2 - (k_0 \sin \theta \cos \varphi \cdot a')^2} \cdot [\sin \varphi \cdot \vec{a}_\theta + \cos \varphi \cos \theta \cdot \vec{a}_\phi] \end{aligned}$$

In base a questa espressione del campo, si trova che la direttività dell'antenna è

$$D = \frac{4\pi \cdot I_{\max}}{P_{\text{irr}}} = 10.2 \cdot \frac{(a'b)}{\lambda^2}$$

Questa espressione mostra ancora una volta l'opportunità di avere una apertura quanto più estesa possibile, oltre il fatto che la direttività diminuisce all'aumentare della lunghezza d'onda.

Inoltre, si trova che il guadagno direttivo dell'antenna è sostanzialmente coincidente con la direttività (che è il massimo valore del guadagno), considerando tra l'altro che le perdite di potenza sono generalmente piccole.

Facciamo ora notare che, una volta fissata la lunghezza dell'antenna a tromba, si può ottenere un valore maggiore del guadagno aumentando l'angolo  $\psi$  e, per contro, tollerando un errore di fase  $\Delta$  sull'apertura più grande: questo perché l'aumento dell'estensione dell'apertura compensa ampiamente la diminuzione del guadagno derivante dal maggiore valore di  $\Delta$ . Analizzando nel dettaglio gli effetti sul guadagno da parte di un valore maggiore di  $\Delta$ , si è trovato che, per una prefissata lunghezza, il massimo guadagno si ottiene incrementando la dimensione  $a'$  fin quando l'errore di fase  $\Delta$  risulta inferiore a **0.75 $\pi$** .

## E-plane horn antennas

I discorsi del paragrafo precedente sono relativi ad una antenna a tromba la cui parte finale è stata allargata, rispetto al resto della struttura, solo lungo la direzione  $x$ . Se invece l'allargamento coinvolge solo la direzione  $y$ , allora si parla di **E-plane horn antenna**, in quanto la direzione  $y$  è quella lungo cui è disposto il campo elettrico guidato dalla struttura. Per questo tipo di antenna valgono esattamente le stesse considerazioni del precedente paragrafo, a patto ovviamente di dualizzare opportunamente il discorso: ad esempio, il campo elettrico irradiato in zona lontana è

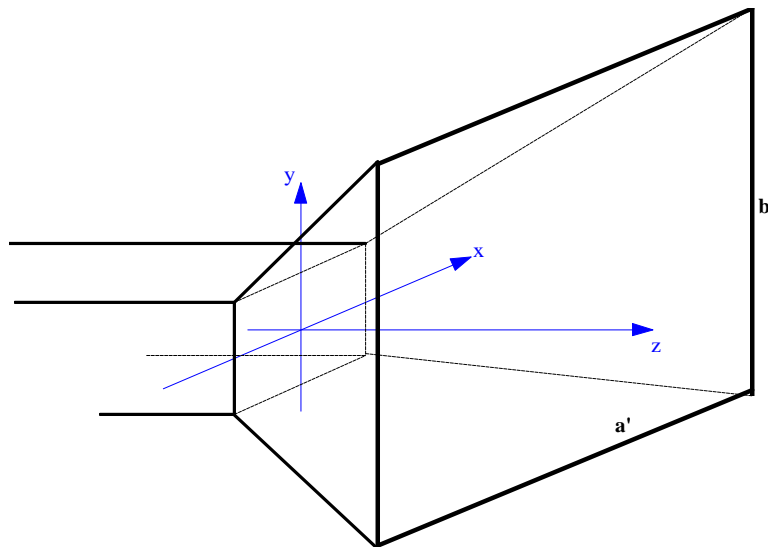
$$\begin{aligned} \vec{E}_{FF} &= j \frac{k_0}{2\pi} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \cdot [f_y \sin \varphi \cdot \vec{a}_\theta + f_x \cos \varphi \cos \theta \cdot \vec{a}_\varphi] = \\ &= ja'bE_0k_0 \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \cdot \frac{\sin\left(k_0 \sin \theta \sin \varphi \frac{b'}{2}\right) \cos\left(k_0 \sin \theta \cos \varphi \cdot \frac{a}{2}\right)}{k_0 \sin \theta \sin \varphi \frac{b'}{2} \pi^2 - (k_0 \sin \theta \cos \varphi \cdot a)^2} \cdot [\sin \varphi \cdot \vec{a}_\theta + \cos \varphi \cos \theta \cdot \vec{a}_\varphi] \end{aligned}$$

dove ovviamente abbiamo considerato le dimensioni  $a$  (lungo  $x$ ) e  $b' > b$  (lungo  $y$ ).

Se la lunghezza dell'antenna è fissata, il massimo guadagno è ottenuto aumentando  $b'$  fin quando l'errore di fase del campo sull'apertura non supera il valore  $0.5\pi$ . L'errore massimo di fase tollerabile per questo tipo di antenne risulta però maggiore rispetto a quelle descritte nel paragrafo precedente: il motivo è semplicemente che il campo sull'apertura va in questo caso a zero ai bordi dell'apertura stessa nel *piano H*, mentre invece prima esso risultava costante nel *piano E*.

## Antenne a tromba piramidale

Il caso più generale possibile di antenna a tromba è quello in cui l'allargamento della struttura guidante viene fatto sia lungo  $x$  sia lungo  $y$ , nel qual caso si ottiene l'**antenna a tromba piramidale**:



Anche qui valgono ovviamente le stesse considerazioni dei due paragrafi precedenti: ad esempio, al fine di avere un piccolo errore di fase nel campo sull'apertura, gli angoli  $\psi_x$  e  $\psi_y$  che individuano l'apertura stessa devono soddisfare entrambi alla condizione  $\tan \frac{\psi}{4} \leq \frac{\lambda}{4a'}$ .

Il campo elettrico irradiato in zona lontana è evidentemente

$$\begin{aligned} \bar{E}_{FF} &= j \frac{k_0}{2\pi} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \cdot [f_Y \sin \varphi \cdot \bar{a}_\theta + f_X \cos \varphi \cos \theta \cdot \bar{a}_\varphi] = \\ &= ja'bE_0 k_0 \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \cdot \frac{\sin\left(k_0 \sin \theta \sin \varphi \frac{b'}{2}\right) \cos\left(k_0 \sin \theta \cos \varphi \cdot \frac{a'}{2}\right)}{k_0 \sin \theta \sin \varphi \frac{b'}{2} \pi^2 - (k_0 \sin \theta \cos \varphi \cdot a')^2} \cdot [\sin \varphi \cdot \bar{a}_\theta + \cos \varphi \cos \theta \cdot \bar{a}_\varphi] \end{aligned}$$

Per una prefissata lunghezza, il massimo guadagno è ottenuto incrementando i due suddetti angoli  $\psi_x$  e  $\psi_y$  in modo che l'errore di fase del campo sull'apertura non superi il valore  $0.75\pi$  nel *piano H* e  $0.5\pi$  nel *piano E*. Per una struttura progettata con questi criteri, la direttività risulta essere

$$D = \frac{4\pi \cdot I_{\max}}{P_{\text{irr}}} = 6.4 \cdot \frac{(a'b')}{\lambda^2}$$

Questa formula è ottenuta da quella trovata per l' *H-plane horn antenna* moltiplicandola per un fattore 0.63.

**Autore: Sandro Petrizzelli**

e-mail: [sandry@iol.it](mailto:sandry@iol.it)

sito personale: <http://users.iol.it/sandry>

succursale: <http://digilander.iol.it/sandry1>