

Misura di grandezze fisiche
Stima delle incertezze

Maria Luisa De Giorgi
Dipartimento di Fisica
UniSalento - Lecce

Scopo della lezione :

esporre sinteticamente
i metodi di elaborazione dei dati sperimentali

Carattere operativo della lezione:

nessuna preoccupazione formale

Lo studio dei fenomeni naturali è possibile grazie al **Metodo Sperimentale** basato su

- Osservazioni (quantitative)
- Formulazione della teoria e previsioni
- Verifica sperimentale (quantitativa)
- Conferma o negazione della teoria

Nota Bene : carattere quantitativo delle misure
utilizzo del linguaggio matematico

La misura

Alla base del Metodo Sperimentale c'è la definizione di grandezza

Si definisce **grandezza fisica** di un sistema fisico una sua caratteristica (ad esempio lunghezza, massa, velocità ...) sulla quale possa essere eseguita un'**operazione di misura** mediante una **ben definita procedura sperimentale**

La **misura** è l'operazione che assegna in modo **oggettivo e riproducibile** un certo valore alla grandezza, mediante l'uso di strumenti e metodi pratici ed analitici.

La misura è **diretta** se eseguita per confronto con un campione (**unità di misura**)

Il confronto è **simultaneo** quando il sistema fisico di cui si misura la grandezza e il campione unitario sono entrambi presenti all'atto della misura (ad es. la misura di una lunghezza per confronto con un regolo graduato o di una massa per confronto con le masse campioni di una pesiera).

Il confronto è **differito** quando avviene per mezzo di uno strumento di misura tarato (ad es. un termometro).

Una grandezza fisica è misurata **indirettamente** se può essere definita e misurata tramite altre grandezze

Esempio: la misura della velocità richiede misure dirette di distanze e tempi

Limitatamente alla Meccanica si definiscono delle grandezze fondamentali da cui si possono derivare tutte le altre grandezze fisiche

- Lunghezza L
- Massa M
- Tempo T

Sono dette **grandezze fondamentali**

Tutte le grandezze ottenute per definizione come rapporto tra due valori della stessa grandezza (angoli, densità relative, ...) sono **grandezze adimensionali** (numeri puri)

Sistema Internazionale (S.I.)

Grandezza	Unità SI		
	nome	simbolo	definizione
Lunghezza	metro	m	"il metro è la lunghezza del tragitto compiuto dalla luce nel vuoto in un intervallo di tempo di $1/299.792.458$ di secondo"; è così fissata, per definizione, la velocità della luce in $299.792.458$ m/s
Massa	kilogrammo	kg	"il kilogrammo è l'unità di massa ed è eguale alla massa del prototipo internazionale". Il prototipo internazionale, cilindro di platino iridio, è conservato presso il BIPM (Bureau International des Poids et mesures)"
Tempo	secondo	s	"il secondo è l'intervallo di tempo che contiene $9.192.631.770$ periodi della radiazione corrispondente alla transizione tra i due livelli iperfini dello stato fondamentale dell'atomo di cesio 133"

Sistema Internazionale (S.I.)

Intensità di corrente elettrica	ampere	A	"l'ampere è l'intensità di corrente elettrica che, mantenuta costante in due conduttori paralleli, di lunghezza infinita, di sezione circolare trascurabile e posti alla distanza di un metro l'uno dall'altro, nel vuoto, produrrebbe tra i due conduttori la forza di 2×10^{-7} newton per ogni metro di lunghezza"
Temperatura termodinamica	kelvin	K	"il kelvin, unità di temperatura termodinamica, è la frazione $1/273,16$ della temperatura termodinamica del punto triplo dell'acqua" La temperatura termodinamica si indica con il simbolo T; il valore numerico della temperatura Celsius (indicata con t) in gradi celsius è data da: $t (^{\circ}\text{C}) = T (^{\circ}\text{K}) - 273,16$.
Quantità di sostanza	mole	mol	"la mole è la quantità di sostanza di un sistema che contiene tante entità elementari quanti sono gli atomi in 0,012 kg di carbonio 12. Le entità elementari devono essere specificate e possono essere atomi, molecole, ioni, elettroni, ecc, ovvero gruppi specificati di tali particelle". In questa definizione va inteso che gli atomi di carbonio 12 sono non legati e nello stato fondamentale.
Intensità luminosa	candela	cd	"la candela è l'intensità luminosa, in una data direzione, di una sorgente che emette una radiazione monocromatica di frequenza 540×10^{12} hertz e la cui intensità energetica in quella direzione è $1/683$ watt allo steradiante"

MULTIPLI E SOTTOMULTIPLI :

Quando l'unità SI è troppo grande o troppo piccola per certe misurazioni, si possono usare suoi multipli o sottomultipli decimali. Per soddisfare le esigenze di tutti gli utilizzatori del sistema SI. La Conferenza Generale dei Pesi e delle Misure (CGPM) ha stabilito un certo numero di prefissi con nomi speciali.

Il prefisso precede l'unità di misura con la quale forma il multiplo e sottomultiplo; non può essere usato da solo, né si possono usare due prefissi consecutivi. Si scriverà 1 μm e non 1 mmm, 1pF e non 1 $\mu\mu\text{F}$. Il simbolo del prefisso è scritto con carattere diritto come il simbolo delle unità, non si lasciano spazi, né si interpone il punto tra i due simboli:

$$1000 \text{ V} = 10^3 \text{ V} = 1\text{kV}$$

$$0,000\ 001 \text{ s} = 10^{-6} \text{ s} = 1 \mu\text{s}$$

fattore di moltiplicazione	prefisso	
	nome	simbolo
1 000 000 000 000 000 000 000 000 = 10^{24}	yotta	Y
1 000 000 000 000 000 000 000 000 = 10^{21}	zetta	Z
1 000 000 000 000 000 000 000 = 10^{18}	exa	E
1 000 000 000 000 000 000 = 10^{15}	peta	P
1 000 000 000 000 000 = 10^{12}	tera	T
1 000 000 000 = 10^9	giga	G
1 000 000 = 10^6	mega	M
1 000 = 10^3	kilo	k
100 = 10^2	etto	h
10 = 10^1	deca	da
0,1 = 10^{-1}	deci	d
0,01 = 10^{-2}	centi	c
0,001 = 10^{-3}	milli	m
0,000 001 = 10^{-6}	micro	μ
0,000 000 001 = 10^{-9}	nano	n
0,000 000 000 001 = 10^{-12}	pico	p
0,000 000 000 000 001 = 10^{-15}	femto	f
0,000 000 000 000 000 001 = 10^{-18}	atto	a
0,000 000 000 000 000 000 001 = 10^{-21}	zepto	z
0,000 000 000 000 000 000 000 001 = 10^{-24}	yocto	y

Spesso in Meccanica si usa il sistema cgs (o di Gauss)

Lunghezza → centimetro (cm)

Massa → grammo (g)

Tempo → secondo (s)

Gli strumenti di misura

Uno strumento di misura è un dispositivo mediante il quale si stabilisce una corrispondenza tra una grandezza e la sua misura.

Ciò si ottiene traducendo una *sollecitazione* apportata dalla grandezza da misurare nella variazione (risposta) di un'altra grandezza più facilmente misurabile.

Può essere:

- **analogico** (la risposta è letta su una scala graduata) su cui può muoversi
- **digitale** (la risposta è rappresentata in cifre su un supporto visivo)

Alcuni strumenti sono dotati di interfacce per la comunicazione con un computer su cui trasferire, immagazzinare, elaborare i dati.

Caratteristiche generali degli strumenti di misura

- Intervallo di misura
- Prontezza
- Sensibilita'

Intervallo di misura

E' dato dal valore minimo - *soglia* - e dal valore massimo - *portata* - della grandezza in esame che lo strumento e' in grado di fornire



attenzione alla portata!

La prontezza

E' la rapidità con cui uno strumento risponde ad una variazione della grandezza



tempo caratteristico

La sensibilità

E' costituita dalla minima variazione della grandezza apprezzabile dallo strumento



errore di sensibilità

Importanza delle incertezze nelle misure fisiche

La parola "errore" non significa equivoco o sbaglio

Essa assume il significato di **incertezza** da associare alla misura

**Nessuna quantità fisica può essere
misurata con completa certezza**

Il **valore vero** sarebbe il risultato di un'operazione di misura ideale, priva di errore: tale misura nella realtà è irrealizzabile

Gli errori

- ⊙ Disturbi
- ⊙ Svarioni
- ⊙ Errori sistematici
- ⊙ Errori casuali

Gli svarioni

Sono quegli errori madornali dovuti ad esempio ad una distrazione dello sperimentatore (lettura errata dello strumento, trascrizione sbagliata dei dati, ...)

I disturbi

I disturbi sono errori occasionali, temporanei che scompaiono quando la misura viene ripetuta

Entrambi sono eliminabili da parte di un attento sperimentatore. Più importanti nella trattazione della teoria della misura sono gli errori sistematici e gli errori casuali

Gli errori sistematici

Sono errori che alterano la misura sistematicamente
in eccesso o in difetto



non sono rilevati mediante la ripetizione delle misure, ma
confrontando risultati di misure eseguite con strumenti
o procedure diverse

Gli errori sistematici

Difetti dello strumento (in uno strumento starato non esiste accordo tra il "valore vero" della grandezza e la risposta dello strumento)

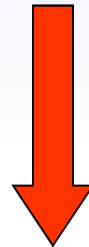
Interazione strumento-sperimentatore (nell'errore di parallasse l'errore è dovuto ad una sbagliata angolazione dello sperimentatore rispetto alla scala dello strumento)

Interazione strumento-fenomeno (nella misura della temperatura di un fluido con un termometro ciò che si misura effettivamente è la temperatura del sistema termometro-fluido dopo il raggiungimento dell'equilibrio termodinamico)

Errate condizioni di lavoro (alcuni strumenti sono tarati per lavorare a determinate temperature e forniscono risposte non veritiere se usati ad altre temperature)

Gli errori casuali

Possono avvenire con uguale probabilità sia in difetto che in eccesso rispetto al valore vero: tipicamente si distribuiscono in modo simmetrico intorno alla media aritmetica

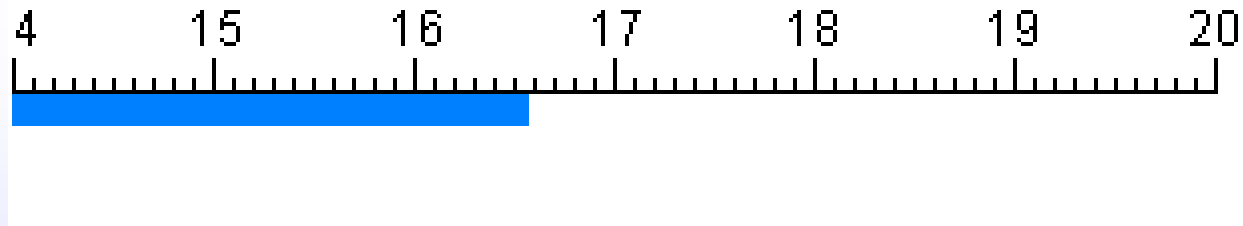


sono rilevati mediante la ripetizione delle misure e sono spiegati con l'impossibilità di riprodurre esattamente le stesse condizioni sperimentali

Osservazione: se si adopera per la misura uno strumento di scarsa sensibilità, i valori delle misure ripetute coincidono e come incertezza della misura si usa l'errore di sensibilità strumentale

Nessuna grandezza fisica puo' essere determinata con precisione assoluta ma è sempre affetta da una incertezza

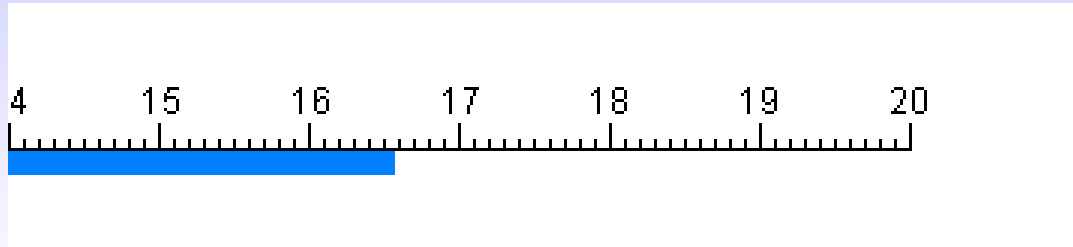
La precisione della misura dipende dal modo in cui la grandezza e' misurata (*tipo di strumento, procedura,...*)



$$16.5 \text{ cm} < x < 16.6 \text{ cm}$$

$$x = (16.55 \pm 0.05) \text{ cm}$$

Incertezza assoluta e relativa



$$x = (16.55 \pm 0.05) \text{ cm}$$

L'incertezza assoluta della misura e' 0.05 cm (ovvero 0.5 mm)

A parità di incertezza assoluta una misura puo' essere piu' o meno accurata a seconda del valore della grandezza misurata.

L'incertezza relativa della misura e' data da $\frac{\Delta x}{x}$

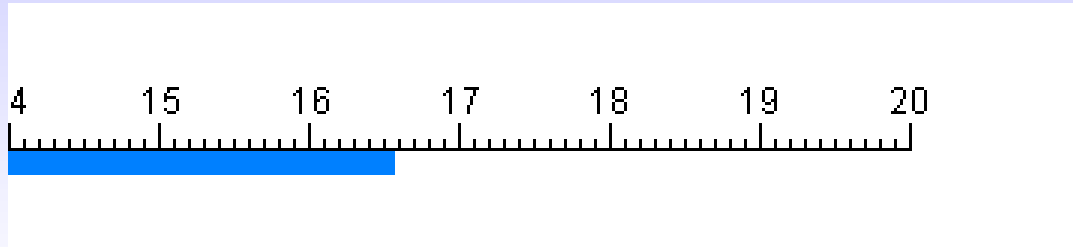
$$x_1 = (4.55 \pm 0.05) \text{ cm}$$

$$x_2 = (53.20 \pm 0.05) \text{ cm}$$

$$\frac{\Delta x_1}{x_1} = \frac{0.05}{4.55} \approx 0.01 (1\%)$$

$$\frac{\Delta x_2}{x_2} = \frac{0.05}{53.20} \approx 0.001 (0.1\%)$$

Se ripetiamo la misura con la stessa riga millimetrata, otteniamo sempre lo stesso risultato



$$16.5 \text{ cm} < x < 16.6 \text{ cm}$$

$$x = (16.55 \pm 0.05) \text{ cm}$$



Le misure sono ripetibili

&

La precisione della misura e' data dall'errore di sensibilita' dello strumento (0.05 cm)

Tuttavia spesso si utilizza come incertezza la divisione più piccola della scala dello strumento

$$x = (16.5 \pm 0.1) \text{ cm}$$

Ripetiamo più volte la misura con uno strumento più sensibile, ad esempio in grado di apprezzare 1/1000 di cm

$$x_1 = 16.534 \text{ cm}$$

$$x_2 = 16.533 \text{ cm}$$

$$x_3 = 16.534 \text{ cm}$$

$$x_4 = 16.535 \text{ cm}$$

$$x_5 = 16.532 \text{ cm}$$

$$x_6 = 16.532 \text{ cm}$$

$$x_7 = 16.533 \text{ cm}$$

$$\Delta x = 0.001 \text{ cm}$$

E' corretto dare il risultato di ogni singola misura con 3 cifre decimali, ma, poiché le misure non danno lo stesso valore, l'indeterminazione non e' più data solo dalla sensibilità dello strumento

Intervengono numerose fluttuazioni di entità minima dovute a effetti non controllabili dallo sperimentatore:

errori casuali → incertezze statistiche

Le misure si addensano quasi simmetricamente attorno alla media aritmetica (o media campionaria) del campione di N misure

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

Per un numero elevato di misure è ragionevole supporre che la media rappresenti la migliore stima del valore vero della grandezza misurata

Si definisce scarto della i-esima misura

$$x_i - \bar{x}$$

che dà un'indicazione dello scostamento della singola misura dal valor medio

Esempio

Consideriamo un campione di $N = 30$ misure dell'intervallo di tempo x che un pendolo impiega per compiere 10 oscillazioni. Le misure x_i sono eseguite con un cronometro in grado di apprezzare 0.01 s.

19.35, 19.83, 20.07, 19.40, 19.85, 20.08, 19.48, 19.87, 20.13, 19.49,
19.88, 20.18, 20.20, 19.89, 19.60, 19.67, 19.94, 20.25, 20.28, 19.95,
19.70, 19.70, 20.00, 20.40, 20.52, 20.04, 19.75, 19.80, 20.05, 20.64.

media aritmetica o media campionaria del campione di $N = 30$ misure

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{30} x_i}{30} = \frac{597.99}{30} = 19.933...s$$

semidispersione massima

$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2} = \frac{20.64 - 19.35}{2} = 0.645 \text{ s}$$

deviazione standard del campione di N = 30 misure

$$\sigma \approx s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{30} (x_i - \bar{x})^2}{30 - 1}} = \sqrt{\frac{3.1120}{29}} = 0.32758 \dots \text{s}$$

deviazione standard della media

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{0.33}{\sqrt{30}} = 0.060 \text{ s}$$

Cifre significative

Ogni numero è espresso con un determinato numero di cifre

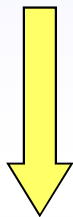
Per numero di cifre significative si intende il numero di tutte le cifre scritte, compreso lo 0, a partire da destra fino all'ultima $\neq 0$ a sinistra

Numero	cifre significative
123,4	4
123,42	5
123,420	6
0,04	1
0,042	2
0,0420	3

Il numero di cifre significative del risultato di una misura è correlato alla bontà della misura e non può essere scelto arbitrariamente

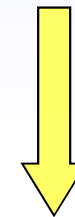
Cifre significative per esprimere l'errore

Incertezze massime
(errore di sensibilità,
semidispersione massima)



1 cifra significativa

Incertezze statistiche
(deviazione standard)



2 cifre significative

Valutato l'errore resta stabilito il numero di cifre significative per esprimere il valore di una misura

La semidispersione massima $\Delta x = 0.645s$

si esprime: $\Delta x = 0.6s$

La deviazione standard $\sigma = 0.32758\dots s$

si esprime: $\sigma = 0.33s$

La deviazione standard della media $\sigma_{\bar{x}} = 0.060s$

si esprime: $\sigma_{\bar{x}} = 0.060s$

Cifre significative per esprimere la misura

Per esprimere una misura si riportano tante cifre in modo che l'ultima (o le due ultime - nel caso di incertezze statistiche) corrisponda alla cifra (o cifre) significativa dell'incertezza

ESEMPI

$$x = 26.7842s \quad \Delta x = 0.3472s \quad \Delta x = 0.3s \quad x = (26.8 \pm 0.3)s$$

$$x = 123.8432\text{m/s} \quad \Delta x = 0.0475\text{m/s} \quad \Delta x = 0.05\text{m/s} \quad x = (123.84 \pm 0.05)\text{m/s}$$

$$x = 233.72\text{cm} \quad \Delta x = 1.452\text{cm} \quad \Delta x = 1\text{cm} \quad x = (234 \pm 1)\text{cm}$$

$$x = 26.7842s \quad \sigma_x = 0.02325s \quad \sigma_x = 0.023s \quad x = (26.784 \pm 0.023)s$$

$$x = 123.8432\text{m/s} \quad \sigma_x = 0.472\text{m/s} \quad \sigma_x = 0.47\text{m/s} \quad x = (123.84 \pm 0.47)\text{m/s}$$

$$x = 233.72\text{cm} \quad \sigma_x = 23.42\text{cm} \quad \sigma_x = 23\text{cm} \quad x = (234 \pm 23)\text{cm}$$

La propagazione degli errori

La maggior parte delle grandezze fisiche non può essere misurata attraverso una singola misura diretta, ma occorre determinarla attraverso due passi distinti: la misura diretta delle singole grandezze e, attraverso queste, il calcolo della quantità cercata.

Per esempio, per misurare la superficie di un tavolo rettangolare, occorre prima effettuare direttamente le misure dei due lati valutando le relative incertezze, poi si passa a calcolare la superficie attraverso il prodotto dei due lati.

Anche la determinazione dell'errore necessita di due fasi:

- a) valutare le incertezze delle grandezze misurate direttamente
- b) trovare come tali incertezze si propagano attraverso i calcoli

La propagazione degli errori

1. Errori nelle somme e differenze
2. Errori nei prodotti e quozienti
3. Errori nell'elevazione a potenza
4. Errori nel prodotto per una costante

Metodo passo-passo (somma e differenze)

$$z_m = x_m + y_m$$

$$\Delta z = \Delta x + \Delta y$$

Se diverse grandezze x, y, \dots, w sono misurate con incertezze $\Delta x, \Delta y, \dots, \Delta w$ e tali valori vengono utilizzati per calcolare quantità del tipo

$$z = x + \dots + y - (u + \dots + w)$$

allora l'errore nel valore calcolato di z è pari alla somma di tutti gli errori assoluti originali

$$\Delta z = \Delta x + \Delta y + \dots + \Delta u + \Delta w$$

Errori nelle prodotti e nei quozienti

$$z_m = x_m \cdot y_m$$

$$\frac{\Delta z}{|z_m|} \approx \frac{\Delta x}{|x_m|} + \frac{\Delta y}{|y_m|}$$

$$z = z_m \left(1 \pm \frac{\Delta z}{|z_m|} \right)$$

Se diverse grandezze x, y, \dots, w sono misurate con incertezze $\Delta x, \Delta y, \dots, \Delta w$ e tali valori vengono utilizzati per calcolare quantità del tipo

$$z = \frac{x \dots y}{u \dots w}$$

allora l'errore relativo nel valore calcolato di z è pari alla somma di tutti gli **errori relativi originali**

$$\frac{\Delta z}{|z|} \approx \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{\Delta y}{|y|} + \dots + \frac{\Delta u}{|u|} + \frac{\Delta w}{|w|}$$

La propagazione degli errori massimi

	Relazione tra z e (x,y)	Relazione tra Δz e $(\Delta x, \Delta y)$
1	$z = x + y$	$\Delta z = \Delta x + \Delta y$
2	$z = x - y$	$\Delta z = \Delta x + \Delta y$
3	$z = x \cdot y$	$\frac{\Delta z}{z} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$
4	$z = x/y$	$\frac{\Delta z}{z} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$
5	$z = x^n$	$\frac{\Delta z}{z} = n \frac{\Delta x}{x}$
6	$z = \ln x$	$\Delta z = \frac{\Delta x}{x}$
7	$z = e^x$	$\frac{\Delta z}{z} = \Delta x$

La propagazione degli errori statistici

	$g = f(x,y)$	Relazione tra σ_g e (σ_x, σ_y)
1	$g = x + y$	$\sigma_g = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$
2	$g = x - y$	$\sigma_g = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$
3	$g = x \cdot y$	$\frac{\sigma_g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$
4	$g = x/y$	$\frac{\sigma_g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$
5	$g = x^n$	$\frac{\sigma_g}{g} = n \frac{\sigma_x}{x}$
6	$g = \ln x$	$\sigma_g = \frac{\sigma_x}{x}$
7	$g = e^x$	$\frac{\sigma_g}{g} = \sigma_x$

Errori casuali
e indipendenti

Confronto di due misure e discrepanza

In molte esperienze si determinano due numeri che, in teoria, dovrebbero essere uguali.

Se due misure sono in disaccordo si dice che tra loro vi è una **discrepanza**.

Numericamente si definisce **discrepanza** la differenza tra due valori misurati della stessa grandezza.

NOTA: una discrepanza può essere o non essere significativa.

Esempio

Due studenti misurano la capacità di un condensatore e ottengono i risultati

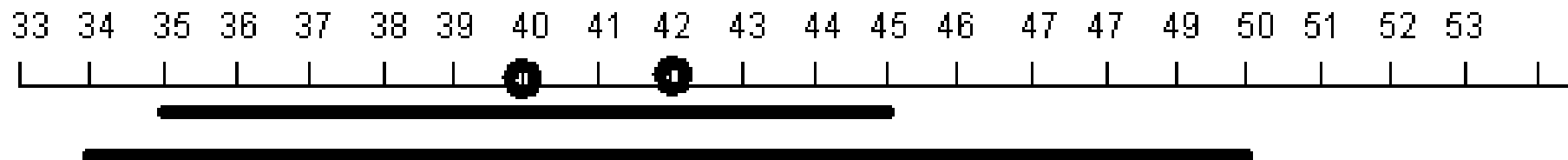
$$C_1 = (40 \pm 5) \text{ nF}$$

e

$$C_1 = (42 \pm 8) \text{ nF}$$

la discrepanza $(42 - 40)$ di 2 nF è minore dei loro errori:

le due misure sono consistenti



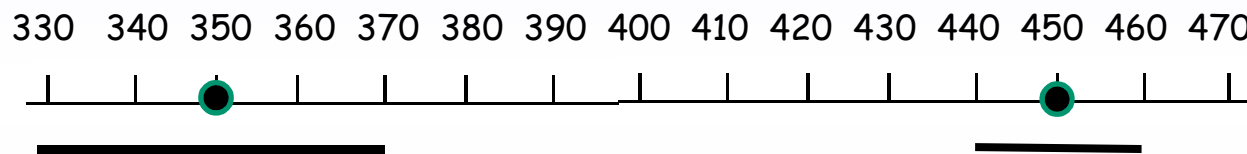
D'altra parte se i risultati fossero stati:

$$C_1 = (350 \pm 20) \text{ nF}$$

e

$$C_1 = (450 \pm 10) \text{ nF}$$

due misure sarebbero state chiaramente inconsistenti e la discrepanza di 100 nF sarebbe significativa.



Ovvero, in generale, se i due intervalli probabili non sono così vicini da sovrapporsi, le misure non sono consistenti.

Occorre verificare l'esistenza di errori, nelle misure o nei calcoli, che abbiano dato luogo a tale discrepanza.