

## Capitolo 3

# ANALISI NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA

### 3.1 FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DI UN SISTEMA LTI

Il punto di partenza dell'analisi nel dominio del tempo è la rappresentazione di segnali (continui o discreti) mediante  $\delta$ -impulsi, definita dalla formula di riproducibilità: conseguentemente la risposta di un sistema LTI ad un ingresso arbitrario si può costruire sovrapponendo le risposte ai segnali elementari costituenti l'ingresso, cioè mediante convoluzione con la risposta impulsiva. Pertanto la somma o l'integrale di convoluzione non solo rappresentano un mezzo di calcolo della risposta di un sistema LTI ad un ingresso arbitrario, ma anche indicano che le caratteristiche di un sistema LTI sono completamente determinate dalla sua risposta impulsiva e consentono quindi di studiarne le proprietà attraverso la risposta impulsiva.

In questo capitolo sviluppiamo un metodo alternativo per l'analisi dei sistemi LTI basata sulla rappresentazione dei segnali come combinazione lineare di esponenziali complessi. Tale alternativa si rivela fruttuosa in quanto gli esponenziali complessi consentono di rappresentare un insieme molto ampio di segnali ed inoltre la risposta di un sistema LTI ad uno di tali segnali di base è proporzionale al segnale stesso: conseguentemente è immediato ottenere l'uscita come sovrapposizione di esponenziali. Infatti, sia  $x(t) = e^{st}$ , con  $s$  numero complesso, l'ingresso di un sistema LTI continuo avente risposta impulsiva  $h(t)$ ; allora la corrispondente uscita è:

$$y(t) = h(t) * e^{st} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau = e^{st} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau}_{H(s)} = H(s) e^{st}$$

ove si è posto:

$$H(s) = \left. \frac{y(t)}{x(t)} \right|_{x(t)=e^{st}} \quad (3.1)$$

Tale relazione definisce al variare di  $s$  la *funzione di trasferimento* del sistema LTI che, quindi, è il rapporto uscita/ingresso nel dominio del tempo in regime esponenziale (fig. 3.1).

Analogamente, nel caso discreto, se il sistema ha risposta impulsiva  $h(n)$ , per un ingresso esponenziale  $x(n) = z^n$ ,



Figura 3.1: Funzione di trasferimento di un sistema LTI.

con  $z$  numero complesso, si ha:

$$y(n) = h(n) * z^n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)z^{n-m} = z^n \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)z^{-m}}_{H(z)} = H(z)z^n$$

ove:

$$H(z) = \left. \frac{y(n)}{x(n)} \right|_{x(n)=z^n} \quad (3.2)$$

è la funzione di trasferimento del sistema LTI discreto (fig. 3.1).

Da quanto esposto segue che gli esponenziali complessi sono *autofunzioni* dei sistemi LTI<sup>1</sup>; il fattore complesso di proporzionalità è l'*autovalore* corrispondente all'autofunzione; l'autovalore dipende dall'autofunzione nel senso che cambiando  $s$  (o  $z$ ) cambia il fattore di proporzionalità.

Nel caso dei sistemi continui la funzione di trasferimento è legata alla risposta impulsiva dalla relazione:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-st} dt \quad (3.3)$$

in altri termini essa è la trasformata (bilatera) di Laplace della risposta impulsiva. Analogamente per i sistemi discreti si ha:

$$H(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)z^{-m} \quad (3.4)$$

e la  $H(z)$  è la zeta trasformata della  $h(n)$ . Lo studio di tali trasformate esula dallo scopo di queste note, a riguardo ci limitiamo a precisare che  $H(s)$  o  $H(z)$  è definita per i valori di  $s$  (risp.  $z$ ) per cui l'integrale (3.3) (risp. la serie (3.4)) converge: tale insieme di valori viene usualmente denominato *regione di convergenza* (ROC).

Le due interpretazioni delle funzioni di trasferimento, cioè come rapporto uscita/ingresso nel dominio del tempo in regime esponenziale e come trasformata della risposta impulsiva, corrispondono a due metodi operativamente validi di calcolo. Nel primo dei due metodi, basato sulle relazioni (3.1) o (3.2), il sistema LTI viene sottoposto a una serie di sollecitazioni di tipo esponenziale, in modo da ricavare per punti la funzione  $H(s)$  o  $H(z)$ . Nel secondo metodo, basato sulle (3.3) o (3.4), si ricava innanzitutto la risposta impulsiva e poi la si trasforma con metodi numerici o analitici. Non è raro peraltro che i legami (3.3) e (3.4) si usino all'inverso, cioè per ricavare le risposte impulsive, note le funzioni di trasferimento, mediante le corrispondenti formule di antitrasformazione.

### Esempio 1: Funzione di trasferimento di un elemento di ritardo

L'elemento di ritardo unitario discreto è definito dal legame ingresso-uscita

$$y(n) = x(n - 1)$$

L'uscita, corrispondente all'ingresso  $z^n$ , è:

$$z^n \longrightarrow z^{n-1} = z^{-1}z^n.$$

Quindi la funzione di trasferimento vale:

$$H(z) = z^{-1}$$

Tale risultato giustifica l'uso del simbolo  $z^{-1}$  per indicare gli elementi di ritardo e, analogamente, del simbolo  $z$  per indicare gli elementi di anticipo.

Nello stesso modo si vede che una linea di ritardo, cioè un sistema continuo definito dal legame ingresso-uscita

$$y(t) = x(t - T)$$

ha una funzione di trasferimento

$$H(s) = e^{-sT}$$

<sup>1</sup>Data una trasformazione  $T(\cdot)$ , una funzione  $\Phi(\cdot)$  si dice autofunzione di  $T$  se  $T(\Phi) = \lambda\Phi$ . In tal caso,  $\lambda$  è l'autovalore associato all'autofunzione  $\Phi$ .

### Esempio 2: Funzione di trasferimento di un sistema ARMA

Si consideri il sistema ARMA definito dall'equazione alle differenze

$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{m=0}^{M-1} b_m x(n-m)$$

con condizioni iniziali omogenee. Posto  $x(n) = z^n$  e quindi  $y(n) = H(z)z^n$  nell'equazione alle differenze si ottiene

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^{M-1} b_m z^{-m}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

Pertanto i sistemi ARMA sono caratterizzati dall'avere una funzione di trasferimento razionale in  $z^{-1}$ : in particolare per i filtri FIR (MA)  $H(z)$  è un polinomio e per i sistemi AR è il reciproco di un polinomio.

## 3.2 RISPOSTA IN FREQUENZA DI UN SISTEMA LTI

Sebbene in generale le variabili  $s$  e  $z$  siano complesse, in questo capitolo limiteremo lo studio al caso

$$s = j\omega = j2\pi f \quad (3.5)$$

cioè  $s$  varia sull'asse immaginario e, rispettivamente, al caso

$$z = e^{j\theta} = e^{j2\pi\nu} \quad (3.6)$$

cioè  $z$  varia sulla circonferenza unitaria. Le rispettive restrizioni delle funzioni di trasferimento, se esistono, si chiamano *risposte in frequenza* o *risposte armoniche*. Quindi la risposta in frequenza per un sistema continuo è:

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}$$

Comunemente, con abuso di notazione, la risposta armonica si indica con  $H(\omega)$  e  $H(f)$ , salvo quando si vuole esplicitamente mettere in evidenza il legame fra risposte in frequenza e funzioni di trasferimento. Notiamo però esplicitamente che le variabili  $s$ ,  $j\omega$ ,  $\omega$  ed  $f$  non sono variabili mute, ma al contrario servono ad indicare la corretta interpretazione delle notazioni  $H(s)$ ,  $H(j\omega)$ ,  $H(\omega)$  e  $H(f)$ ; in altri termini tali notazioni anche se hanno in comune il simbolo  $H()$  stanno ad indicare funzioni diverse e per passare dall'una all'altra occorre il cambiamento di variabile definito dalla (3.5). Analogamente la risposta in frequenza di un sistema discreto è:

$$H(e^{j\theta}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\theta}}$$

e le notazioni semplificate sono  $H(\theta)$  e  $H(\nu)$ .

Da quanto detto e dalla definizione di funzione di trasferimento segue che la risposta in frequenza può essere definita come:

$$H(f) = \left. \frac{y(t)}{x(t)} \right|_{x(t)=e^{j2\pi ft}} \quad (3.7)$$

nel caso di sistemi continui e rispettivamente

$$H(\nu) = \left. \frac{y(n)}{x(n)} \right|_{x(n)=e^{j2\pi\nu n}}$$

per i sistemi discreti. In altri termini la risposta in frequenza è il rapporto uscita/ingresso nel dominio del tempo in regime fasoriale. Si noti che la (3.7) consente di ricavare la risposta in frequenza dei circuiti elettrici mediante i classici metodi di analisi degli stessi circuiti in regime permanente.

**Esempio 1:** Risposta in frequenza di un filtro RC

Con riferimento al filtro RC, per  $x(t) = e^{j\omega t}$ , si ha:

$$y(t) = e^{j\omega t} \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = e^{j\omega t} \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Quindi la risposta armonica di un filtro RC vale:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_c} \quad (3.8)$$

dove

$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

è la pulsazione di taglio a 3 dB del filtro; il nome è giustificato dal fatto che per  $\omega = \omega_c$  si ha  $|H(\omega)| = 1/\sqrt{2}$ , cioè il rapporto fra le ampiezze di uscita e di ingresso è pari a -3 dB; in corrispondenza di tale pulsazione il sistema introduce uno sfasamento di  $\pi/4$  in ritardo. La risposta in frequenza  $H(f)$  si ottiene da quella in termini di pulsazione (3.8) effettuando il cambiamento di variabile  $\omega = 2\pi f$ ; si ha pertanto

$$H(f) = \frac{1}{1 + jf/f_c}$$

con

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC}$$

frequenza di taglio a 3dB. La risposta armonica di un filtro RC è riportata in modulo e fase in fig. 3.2.

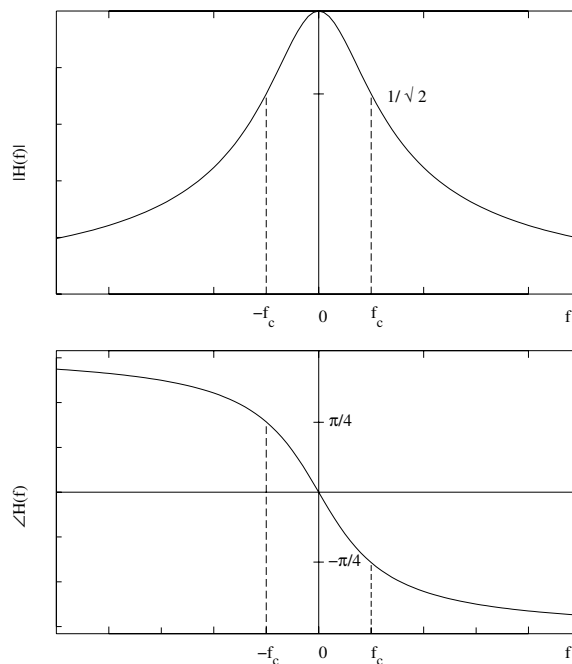


Figura 3.2: Risposta in frequenza di un filtro RC passa-basso.

Sebbene la definizione di risposta in frequenza faccia riferimento a fasori come segnali d'ingresso e quindi ad una sollecitazione complessa, è semplice, per sistemi reali, ricavare la risposta in frequenza a partire da un ingresso di tipo sinusoidale. Iniziamo con l'osservare che, per sistemi lineari reali, l'operatore di sistema commuta con l'operazione di parte reale, nonché con quella di parte immaginaria; in altri termini, se  $y(\cdot) = \mathcal{L}[x(\cdot)]$  denota l'operatore che definisce il sistema, si ha:

$$\begin{aligned} \Re\{\mathcal{L}[x(\cdot)]\} &= \mathcal{L}[\Re\{x(\cdot)\}] \\ \Im\{\mathcal{L}[x(\cdot)]\} &= \mathcal{L}[\Im\{x(\cdot)\}] \end{aligned}$$

Infatti per la linearità del sistema si ha:

$$y(\cdot) = \mathcal{L}[\Re\{x(\cdot)\} + j\Im\{x(\cdot)\}] = \mathcal{L}[\Re\{x(\cdot)\}] + j\mathcal{L}[\Im\{x(\cdot)\}]$$

da cui uguagliando parte reale e coefficiente dell'immaginario del primo e dell'ultimo membro segue l'asserto. In modo analogo si dimostra che sussiste anche la relazione

$$\mathcal{L}^*[x(\cdot)] = \mathcal{L}[x^*(\cdot)]$$

Si noti che le relazioni precedenti valgono per sistemi lineari e reali, ma non necessariamente tempo-invarianti. Da tali relazioni, facendo riferimento per esempio a sistemi continui, segue che la risposta di un sistema LTI al segnale sinusoidale

$$x(t) = A_x \cos(2\pi f_0 t + \varphi_x)$$

è data da:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}[\Re\{A_x e^{j(2\pi f_0 t + \varphi_x)}\}] = \Re\{H(f_0) A_x e^{j(2\pi f_0 t + \varphi_x)}\} = \\ &= \underbrace{A_x |H(f_0)|}_{A_y} \cos[2\pi f_0 t + \underbrace{\varphi_x + \angle H(f_0)}_{\varphi_y}] \end{aligned}$$

cioè la risposta ad una sinusoidale di frequenza  $f_0$  ampiezza  $A_x$  e fase iniziale  $\varphi_x$  è ancora una sinusoidale della stessa frequenza  $f_0$ , avente ampiezza  $A_y$  e fase iniziale  $\varphi_y$  date da:

$$A_y = |H(f_0)| A_x \quad \varphi_y = \angle[H(f_0)] + \varphi_x \quad (3.9)$$

Analogamente nel caso di sistemi discreti, con ovvio significato dei simboli, si ha:

$$A_y = |H(\nu_0)| A_x \quad \varphi_y = \angle[H(\nu_0)] + \varphi_x \quad (3.10)$$

Le (3.9) e (3.10) definiscono un metodo pratico, e largamente usato, per ricavare sperimentalmente modulo e fase della risposta in frequenza di un sistema incognito.

Le relazioni (3.27) sono simili alla (3.9) e alla (3.10), ma il loro significato è diverso. Infatti la (3.9) e la (3.10) consentono di ottenere sperimentalmente la risposta in frequenza del sistema ad una specifica frequenza  $f_0$  (risp.  $\nu_0$ ) valutando il rapporto fra le ampiezze e lo sfasamento fra due sinusoidi rispettivamente in uscita e in ingresso al sistema; quindi, se si desidera la risposta in frequenza a diverse frequenze occorre variare la frequenza delle sinusoidi in ingresso esplorando tutto il campo desiderato. In altri termini la (3.26) definisce la risposta in frequenza del sistema come il rapporto tra lo spettro dell'uscita e quello dell'ingresso, cioè

$$H(\cdot) = \frac{Y(\cdot)}{X(\cdot)} \quad (3.11)$$

Si osservi che tale relazione è sempre formalmente valida, ma non è applicabile per tutte le frequenze in corrispondenza delle quali si annulla lo spettro dell'ingresso poiché a tali frequenze si annulla anche lo spettro dell'uscita e la risposta armonica risulta indeterminata. Pertanto, se si vuole valutare in maniera sufficientemente accurata il comportamento del sistema, questo va sollecitato con un segnale d'ingresso la cui estensione spettrale sia teoricamente infinita e, in pratica, abbia estensione in frequenza più grande di quella – nota o prevedibile – di  $H(\cdot)$  (banda del sistema). In questo senso il segnale d'ingresso ideale è il  $\delta$ -impulso unitario ( $X(\cdot) = 1$  identicamente), usando il quale  $H(\cdot)$  è direttamente fornita dallo spettro del segnale d'uscita, come è d'altra parte ovvio considerando che l'uscita è in questo caso la risposta impulsiva; in pratica i segnali d'ingresso effettivamente usati per questo scopo sono segnali che approssimano l'impulso di Dirac quali impulsi, o treni di impulsi, molto corti o, più in generale, a banda larga.

L'equazione (3.26) relaziona lo spettro in uscita a quello in ingresso; qualora si sia interessati all'andamento temporale del segnale occorre antitrasformare lo spettro, in altri termini, supposti per esempio i segnali a tempo continuo, occorre valutare l'integrale (3.25); tale inversione non è in genere un'operazione banale se non in casi estremi.

### 3.3 TRASFORMATATA DI FOURIER

L'analisi dei paragrafi precedenti evidenzia l'utilità di rappresentare i segnali come sovrapposizione di fasori. Per segnali continui l'equazione che definisce tale rappresentazione (*equazione di sintesi*) è:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.12)$$

e i coefficienti sono dati da (equazione di analisi):

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (3.13)$$

Si noti che, con abuso di notazione, si è denotato con lo stesso simbolo  $X(\cdot)$  due funzioni diverse affidando al nome della variabile indipendente,  $\omega$  o  $f$ , l'identificazione della corretta interpretazione. Non esistono ragioni generali per preferire la notazione in  $f$  o la notazione in  $\omega$  e pertanto le useremo più o meno indifferentemente o, casi specifici, secondo convenienza; il passaggio dall'una all'altra è regolato dal semplice cambiamento di variabile  $\omega = 2\pi f$ .

Analogamente per segnali discreti l'equazione di sintesi è:

$$x(n) = \int_{-1/2}^{+1/2} X(\nu)e^{j2\pi\nu n} d\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(\theta)e^{j\theta n} d\theta \quad (3.14)$$

e quella di analisi:

$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j2\pi\nu n} \quad X(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\theta n} \quad (3.15)$$

Anche in questo caso il passaggio dalla notazione in  $\nu$  a quella in  $\theta$  è regolato dal cambio  $\theta = 2\pi\nu$ .

La funzione  $X(\cdot)$ , indipendentemente dal parametro frequenziale utilizzato ( $\omega$ ,  $f$ ,  $\theta$  o  $\nu$ ), si chiama *Trasformata di Fourier* o *spettro* del segnale  $x(\cdot)$ . Notiamo esplicitamente che lo spettro è una funzione complessa e pertanto è spesso conveniente considerarne la parte reale e la parte immaginaria, ovvero il modulo e la fase: questi ultimi vengono comunemente denominati *spettro d'ampiezza* e, rispettivamente, *spettro di fase*. Nel seguito, per indicare sinteticamente il legame di trasformazione secondo Fourier useremo la scrittura:

$$X(\cdot) = \mathcal{F}\{x(\cdot)\} \quad x(\cdot) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\cdot)\}$$

ovvero anche:

$$x(\cdot) \longleftrightarrow X(\cdot)$$

Le formule precedenti mettono in luce un notevole parallelismo nella rappresentazione spettrale di segnali continui e discreti: la principale differenza, che discende dalla periodicità in frequenza del fasore discreto  $e^{j2\pi\nu n}$ , è che per segnali continui lo spettro  $X(f)$  è di norma aperiodico, mentre lo spettro  $X(\nu)$  di una sequenza è sempre periodico di periodo 1 (ovvero  $X(\theta)$  è periodico di periodo  $2\pi$ ), pertanto è sufficiente considerare  $X(\nu)$  nell'intervallo  $(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$  (ovvero  $X(\theta)$  nell'intervallo  $(-\pi, \pi)$ ). In altri termini, per ricostruire  $x(n)$  si integrano i contributi spettrali nell'intervallo finito  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  (o  $(-\pi, \pi)$ ), ma, data la periodicità, un qualunque intervallo di ampiezza pari al periodo può essere usato alternativamente ed è molto comune anche la scelta degli intervalli  $(0, 1)$  o  $(0, 2\pi)$ .

### 3.4 ESEMPI DI TRASFORMATE

#### Esempio 1: Impulso esponenziale monolatero continuo

Consideriamo un impulso esponenziale monolatero di ampiezza  $A$  e costante di tempo  $T$ , cioè il segnale  $x(t) = Ae^{-t/T} u(t)$ . Dall'equazione di sintesi si ha:

$$X(f) = \int_0^{+\infty} Ae^{-t/T} e^{-j2\pi ft} dt = \frac{AT}{1 + j(2\pi fT)}$$

e quindi:

$$Ae^{-t/T} u(t) \longleftrightarrow \frac{AT}{1 + j(2\pi fT)} \quad (3.16)$$

In particolare spettro d'ampiezza e di fase sono dati da:

$$|X(f)| = \frac{AT}{\sqrt{1 + (2\pi fT)^2}} \quad \angle X(f) = -\arctan(2\pi fT)$$

e sono riportati in fig. 3.3. Si noti che lo spettro d'ampiezza è massimo per  $f = 0$  e decade come  $f^{-1}$  al

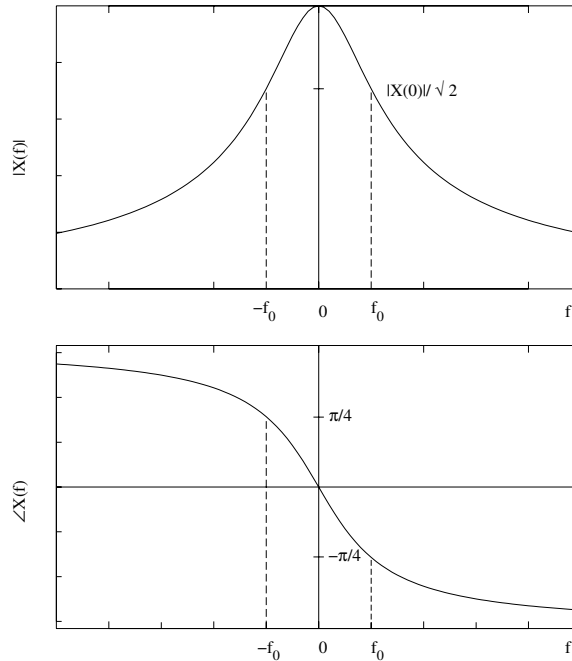


Figura 3.3: Spettro di un impulso esponenziale monolatero.

crescere della frequenza, è cioè concentrato nell'intorno della frequenza nulla (spettro pasabasso); inoltre la frequenza  $f_0 = 1/(2\pi T)$  è la frequenza di taglio a 3 dB avendosi

$$20 \log \left| \frac{X(f)}{X(0)} \right|_{f=f_0} = 10 \log \frac{1}{1 + (2\pi fT)^2} \Big|_{f=f_0} = -3 \text{ dB}$$

Definita la banda di un segnale come la gamma di frequenze occupata dalle componenti significative dello spettro, per il segnale in esame la banda può essere definita come un opportuno multiplo della frequenza di taglio a 3 dB. Ad esempio, posto  $B = 10f_0$  (banda monolatero), le componenti esterne all'intervallo  $(-B, B)$  sono attenuate di almeno 23 dB rispetto a quella di centrobanda; in altri termini si ha:

$$20 \log \left| \frac{X(0)}{X(f)} \right| \geq 23 \text{ dB} \quad \forall |f| \leq B$$

Si osservi infine che al diminuire della costante di tempo  $T$  diminuisce la durata del segnale, ma aumenta la sua banda.

**Esempio 2:** *Impulso esponenziale bilatero continuo*

L'impulso esponenziale bilatero continuo è il segnale

$$x(t) = e^{-a|t|} \quad a > 0$$

ed il suo spettro vale:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} e^{-j2\pi ft} dt = \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$$

Pertanto risulta:

$$e^{-a|t|} \longleftrightarrow \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$$

Lo spettro  $X(f)$  è reale e pari ed è rappresentato in fig. 3.4. Anche l'impulso esponenziale è un segnale passa-basso ed  $a$  è la pulsazione di taglio a 6 dB.

**Esempio 3:** *Sequenza esponenziale monolatero*

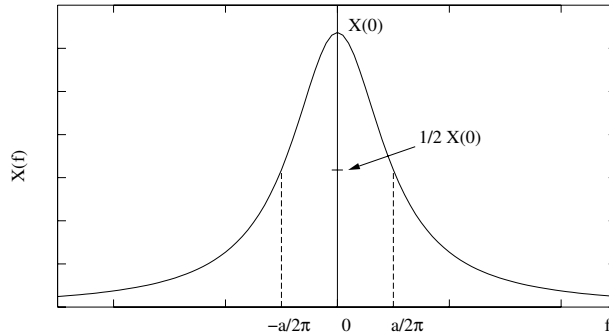


Figura 3.4: Spettro di un impulso esponenziale bilatero.

La sequenza esponenziale monolaterale è il segnale

$$x(n) = a^n u(n) \quad |a| < 1$$

ed il suo spettro vale:

$$X(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u(n) e^{-j\theta n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a e^{-j\theta})^n = \frac{1}{1 - a e^{-j\theta}}$$

In definitiva si ha:

$$a^n u(n) \longleftrightarrow \frac{1}{1 - a e^{-j\theta}}$$

ovvero

$$a^n u(n) \longleftrightarrow \frac{1}{1 - a e^{-j2\pi\nu}}$$

In fig. 3.5 e in fig. 3.6 sono riportati gli spettri d'ampiezza e fase rispettivamente per  $a > 0$  e per  $a < 0$ . Per  $a > 0$  la sequenza è un segnale passa-basso, mentre per  $a < 0$  lo spettro è concentrato nell'intorno delle frequenze  $\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots$  (segnale passa-alto). Il valore di  $|a|$  regola la rapidità di decadimento della sequenza nel dominio del tempo e la larghezza di banda nel dominio della frequenza: precisamente al diminuire di  $|a|$  la sequenza va sempre più rapidamente a zero mentre la sua banda aumenta.

#### Esempio 4: Sequenza esponenziale bilatera

Si consideri la sequenza esponenziale bilatera cioè il segnale:

$$x(n) = a^{|n|} \quad |a| < 1$$

La sua trasformata vale:

$$X(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-j\theta n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-j\theta n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a e^{-j\theta})^n + \sum_{k=1}^{+\infty} (a e^{j\theta})^k$$

La prima sommatoria è la serie geometrica di ragione  $a e^{-j\theta}$  e la seconda sommatoria è la serie geometrica di ragione  $a e^{j\theta}$  mancante del primo termine e quindi:

$$X(\theta) = \frac{1}{1 - a e^{-j\theta}} + \frac{1}{1 - a e^{j\theta}} - 1 = \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos \theta + a^2}$$



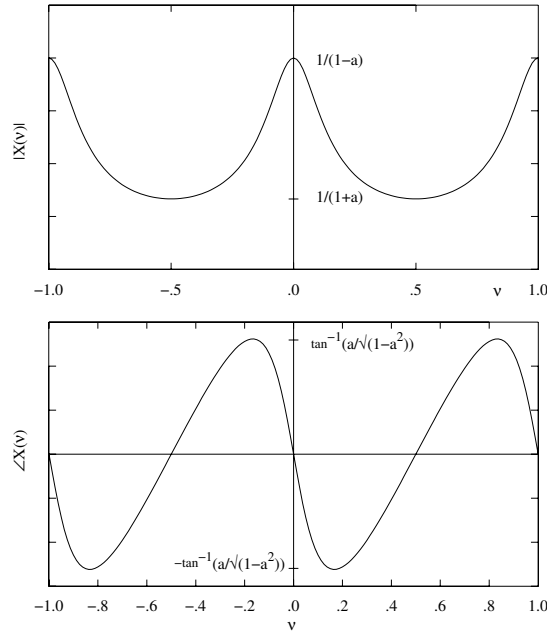


Figura 3.5: Spettro della sequenza esponenziale monolatera (passa-basso).

In definitiva risulta:

$$a^{|n|} \longleftrightarrow \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos \theta + a^2}$$

ovvero

$$a^{|n|} \longleftrightarrow \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos(2\pi\nu) + a^2}$$

Lo spettro della sequenza esponenziale bilatera è reale e pari; inoltre il segnale è passa-basso, per  $0 < a < 1$ , mentre per  $a < 0$  è passa-alto. Tale trasformata è diagrammata in fig. 3.7 per  $0 < a < 1$ .

### Esempio 5: Impulso rettangolare

Consideriamo un impulso rettangolare di ampiezza  $A$  e durata  $T$

$$x(t) = A\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

La sua trasformata è:

$$X(f) = A \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} e^{-j2\pi ft} dt = A \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f} = AT \text{sinc}(fT)$$

Dunque:

$$A\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow AT \text{sinc}(fT) \quad (3.17)$$

Lo spettro dell'impulso rettangolare è reale e pari ed è riportato in fig. 3.8. Tale spettro esibisce una serie di lobi di larghezza  $1/T$ , salvo il centrale che è di larghezza  $2/T$ , e di altezza decrescente; in particolare il primo lobo laterale ha ampiezza 0,207 volte quella del lobo principale, corrispondete ad un'attenuazione di  $\alpha_{SL} = 13.2$  dB.

Il segnale è passa-basso e come larghezza di banda si può assumere la semiampiezza  $1/T$  del lobo principale (banda monolatera); in tal caso, le componenti fuori banda sono attenuate rispetto a quella a frequenza zero di almeno 13.2 dB, si ha cioè

$$\alpha(f) = 20 \log \frac{|X(0)|}{|X(f)|} \geq \alpha_{SL} = 13.2 \text{ dB} \quad \forall |f| \geq \frac{1}{T}$$

e il loro involuppo decade, al crescere della frequenza, come  $1/f$ , pari ad un decremento di 6 dB/ott. = 20 dB/dec.

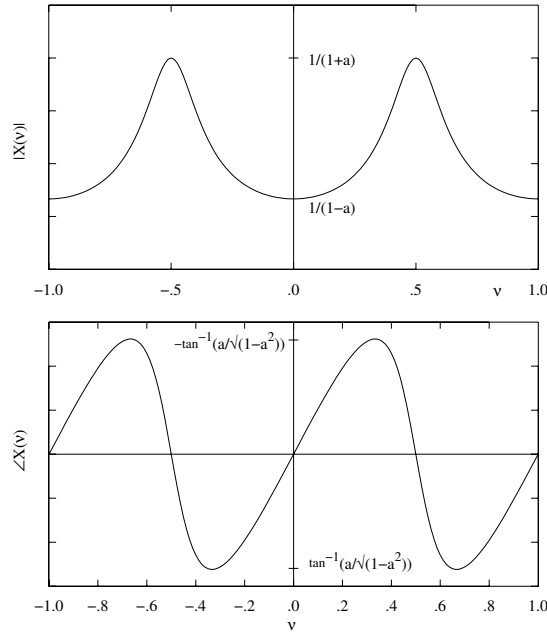


Figura 3.6: Spettro della sequenza esponenziale monolatera (passa-alto).

**Esempio 6:** Impulso  $\text{sinc}(\cdot)$

Consideriamo l'impulso  $\text{sinc}(\cdot)$  di ampiezza  $A$  e banda  $B$ , cioè il segnale:

$$x(t) = A \text{sinc}(2Bt) \quad (3.18)$$

Ponendo nella trasformata di un impulso rettangolare (3.17)  $T = 2B$ , dalle proprietà di dualità e di linearità segue che:

$$A \text{sinc}(2Bt) \longleftrightarrow \frac{A}{2B} \Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$$

Lo spettro di tale impulso è illustrato in fig. 3.9.

Si osservi che l'impulso  $\text{sinc}(\cdot)$  costituisce un primo esempio di segnale a banda rigorosamente limitata, cioè il suo spettro è identicamente zero al di fuori della gamma di frequenze  $-B < f < B$  (banda).

**Esempio 7:** Finestra rettangolare

Si consideri la finestra rettangolare  $x(n) = \mathcal{R}_N(n)$ ; il suo spettro vale:

$$X(\nu) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi\nu n} = \frac{1 - e^{-j2\pi\nu N}}{1 - e^{-j2\pi\nu}}$$

da cui, mettendo in evidenza  $e^{-j\pi\nu N}$  al numeratore e  $e^{-j\pi\nu}$  al denominatore, si ha:

$$\mathcal{R}_N(n) \longleftrightarrow \mathcal{D}_N(\nu) \quad (3.19)$$

ove si è introdotta la funzione di Dirichlet:

$$\mathcal{D}_N(\nu) = \frac{\sin(\pi\nu N)}{\sin(\pi\nu)} e^{-j(N-1)\pi\nu} \quad (3.20)$$

Gli andamenti dello spettro d'ampiezza e di quello di fase della finestra rettangolare sono riportati in fig. 3.10: da tale figura si notano alcune analogie, ma anche alcune differenze, con la trasformata dell'impulso rettangolare continuo. Infatti, poiché la finestra rettangolare è stata definita in modo non simmetrico rispetto all'origine, la sua trasformata non è puramente reale, ma presenta una fase lineare a tratti. L'ampiezza  $A_1$  del primo lobo laterale, rapportata all'ampiezza  $A_0$  del lobo centrale, è leggermente dipendente da  $N$ , secondo la Tab. 3.1: per  $N > 10$  il rapporto  $(A_1/A_0)_B$  si può ritenere approssimativamente costante e pari a  $-13 \text{ dB}$ , tendendo asintoticamente ( $N \rightarrow \infty$ ) a  $-13,26 \text{ dB}$ , cioè al valore che compete all'impulso rettangolare a tempo continuo.

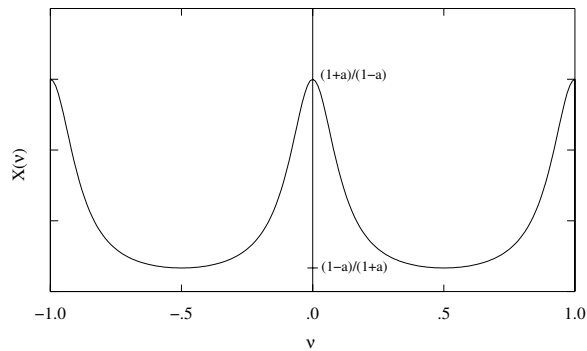


Figura 3.7: Spettro della sequenza esponenziale bilatera ( $0 < a < 1$ ).

**Esempio 8: Impulsi ideali**

Lo spettro del  $\delta$ -impulso discreto  $\delta(n)$  vale:

$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n)e^{-j2\pi\nu n} = 1$$

e quindi:

$$\delta(n) \longleftrightarrow 1$$

Analogamente nel caso dell'impulso ideale continuo si ha:

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

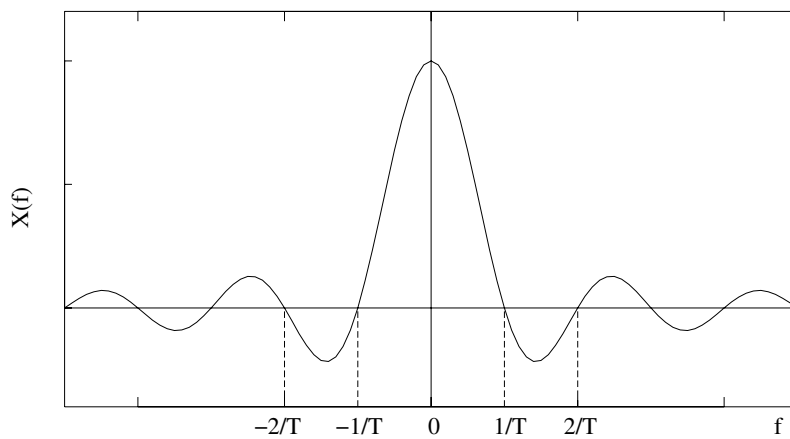


Figura 3.8: Spettro dell'impulso rettangolare.

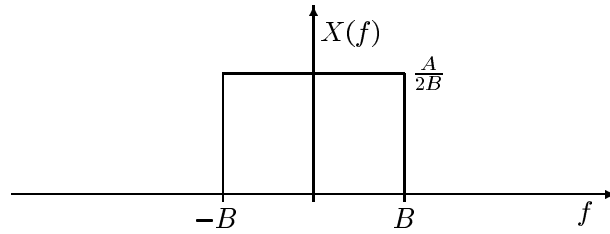


Figura 3.9: Spettro dell'impulso sinc( $\cdot$ ).

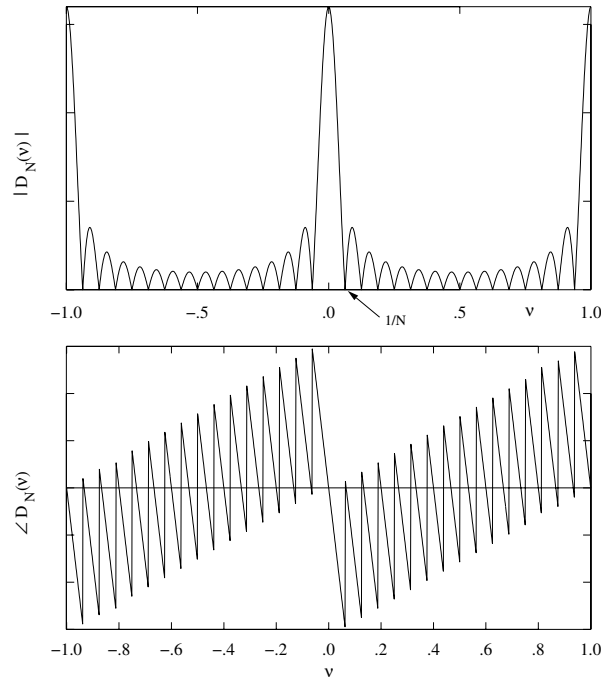


Figura 3.10: Spettro della finestra rettangolare.

Le corrispondenti equazioni di sintesi forniscono due proprietà degli esponenziali:

$$\delta(n) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{j2\pi n\nu} d\nu \quad (3.21)$$

e rispettivamente:

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi ft} df \quad (3.22)$$

Ovviamente le (3.21) e (3.22) valgono indipendentemente dall'interpretazione di  $n$  e  $t$  come tempi e di  $\nu$  e  $f$  come frequenze: in particolare, invertendo i ruoli di  $t$  e di  $f$  nella (3.22) (dualità) e tenendo conto che l'impulso di Dirac è pari, si ha anche:

$$\delta(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft} dt \quad (3.23)$$

La (3.23) è utile perché consente di ottenere la trasformata di Fourier (in senso generalizzato) di un segnale continuo e costante nel tempo, il quale non è dotato di trasformata di Fourier in senso ordinario. Infatti, posto  $x(t) = A$ , si può scrivere:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-j2\pi ft} dt = A\delta(f)$$

e quindi si ottiene la coppia di trasformate:

$$A \longleftrightarrow A\delta(f) = A2\pi\delta(\omega) \quad (3.24)$$

$N$	3	4	5	10	$\infty$
$(A_1/A_0)$	-9,54	-11,30	-12,04	-12,17	-13,26

Tabella 3.1: Valori in dB del rapporto  $A_1/A_0$  al variare di  $t$ .

dove l'ultima uguaglianza segue dalla proprietà di cambiamento della scala degli impulsi di Dirac.

A commento dei vari esempi considerati osserviamo che in linea generale segnali lentamente variabili nel tempo presentano uno spettro molto concentrato in frequenza e viceversa segnali rapidamente variabili presentano componenti spettrali significative anche a frequenze molto elevate.

Il legame ingresso uscita nel dominio della frequenza per un sistema LTI segue immediatamente dal principio di sovrapposizione: infatti esprimendo l'ingresso  $x(t)$ , supposto tempo continuo, come sovrapposizione di fasori, cioè

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df$$

e ricordando che i fasori sono autofunzioni per i sistemi LTI, si ottiene immediatamente la corrispondente rappresentazione dell'uscita in termini di fasori, cioè

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f)X(f)e^{j2\pi ft} df \quad (3.25)$$

Un analogo risultato vale per segnali e sistemi discreti. Da tale equazione segue che gli spettri dell'ingresso e dell'uscita sono legati alla risposta in frequenza del sistema da

$$Y(\cdot) = X(\cdot)H(\cdot) \quad (3.26)$$

Dalla (3.26) segue che il legame per gli spettri di ampiezza e di fase è:

$$|Y(\cdot)| = |X(\cdot)||H(\cdot)| \quad \angle Y(\cdot) = \angle X(\cdot) + \angle H(\cdot) \quad (3.27)$$

Pertanto lo spettro d'ampiezza dell'uscita è pari al prodotto dello spettro d'ampiezza dell'ingresso per la risposta in ampiezza del sistema  $|H(\cdot)|$  e quello di fase è dato dalla somma dello spettro di fase dell'ingresso e della risposta in fase  $\angle H(\cdot)$  del sistema.

Il legame ingresso/uscita nel dominio della frequenza evidenzia come i sistemi LTI abbiano un comportamento selettivo in frequenza: alcune componenti dell'ingresso sono amplificate, altre attenuate o eliminate del tutto; tale proprietà è denominata capacità di filtraggio e spiega l'impiego del termine filtro come sinonimo di sistema.

### 3.5 TRASFORMATE DI FOURIER AL LIMITE

L'ultimo esempio considerato mostra come l'impiego delle funzioni generalizzate consenta di ottenere coppie di trasformate di Fourier anche quando le condizioni di Dirichlet o di energia finita non sono soddisfatte; ciò evidenzia che è possibile definire una rappresentazione spettrale anche per i segnali di potenza e non solo per quelli di energia. L'estensione della trasformazione di Fourier in modo rigoroso richiede la *Teoria delle distribuzioni*, ma tale approccio esula dallo scopo di queste dispense; nel seguito ci limiteremo ad affrontare tale estensione in modo intuitivo.

Sia  $x(t)$  il segnale di cui si vuole ottenere la trasformata e sia  $w_T(t)$  una famiglia di segnali, usualmente denominati *finestre*, che al limite, quando il parametro  $T$  tende all'infinito, tende a diventare identicamente pari ad 1, cioè

$$\lim_{T \rightarrow \infty} w_T(t) = 1$$

Esempi di finestre sono l'impulso rettangolare  $\Pi(t/T)$ , e quello triangolare  $\Lambda(t/T)$ . Si consideri poi il segnale finestrato  $x_T(t) = x(t)w_T(t)$  che, di norma, è dotato di spettro  $X_T(f)$  in senso ordinario; si definisce trasformata di Fourier di  $x(t)$  il limite (in senso generalizzato) di  $X_T(f)$  per  $T \rightarrow \infty$ . Ricapitolando la generalizzazione della definizione di spettro per forme d'onda è

$$x(t) \xrightarrow{F.T.} x_T(t) \xrightarrow{F.T.} X_T(f) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} X(f)$$

Analoga la definizione per sequenze

$$x(n) \xrightarrow{FIN.} x_N(n) \xrightarrow{F.T.} X_N(\nu) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} X(\nu)$$

L'importanza dell'approccio utilizzato nel generalizzare la definizione di spettro è nel suo valore operativo: infatti lo spettro misurato con un analizzatore di spettro è di norma quello del segnale finestrato, con una finestra di durata sufficientemente grande.

Allo scopo di chiarire ulteriormente la definizione data consideriamo alcuni esempi.

**Esempio 1:** *Spettro di un segnale costante*

Consideriamo un segnale costante  $x(t) = A$ ; moltiplicandolo per la finestra rettangolare

$$w_T(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

e ricordando che:

$$x_T(t) = A\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow X_T(f) = AT \operatorname{sinc}(fT)$$

da cui, facendo divergere la durata della finestra si ricava

$$A \longleftrightarrow \lim_{T \rightarrow +\infty} AT \operatorname{sinc}(fT) = A\delta(f)$$

Si osservi che lo spettro di una costante è una riga ( $\delta$ -impulso) a frequenza zero, mentre quello del segnale finestrato ha una banda non nulla (dispersione spettrale) tanto più piccola quanto maggiore è la durata della finestra; per una data durata, la precisione della misura dipende dal tipo di finestra utilizzato nel senso che, al variare del tipo di finestra utilizzata, variano la dispersione spettrale (banda) e la rapidità di decadimento a zero dello spettro del segnale finestrato.

**Esempio 2:** *Sequenza costante*

Consideriamo la sequenza costante  $x(n) = \tilde{\delta}(n)$ , cioè la sequenza<sup>2</sup>:

$$\tilde{\delta}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(n-k)$$

quindi  $\tilde{\delta}(n)$  è una successione d'impulsi unitari, cioè un segnale che vale identicamente uno, per qualsiasi  $n$ . Troncando tra  $-N$  e  $N$  ( $2N + 1$  campioni) ed utilizzando la procedura al limite, si ottiene

$$\tilde{\delta}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(n-k) \longleftrightarrow \tilde{\delta}(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu-k) \quad (3.28)$$

come mostrato in figura 3.11

### 3.6 PROPRIETÀ DELLA TRASFORMATATA DI FOURIER

In questo paragrafo analizziamo le proprietà della trasformata di Fourier che, per la maggior parte, valgono indifferentemente sia per le forme d'onda che per le sequenze; pertanto, per evitare inutili duplicazioni, le proprietà saranno espresse (quando possibile) con riferimento ad un argomento generico, denotato con il simbolo  $(\cdot)$ , che può essere specializzato nei vari casi d'interesse. Conformemente all'uso adottato sinora, i segnali nel dominio del tempo vengono denotati con la lettera minuscola e le loro trasformate con le corrispondenti maiuscole. Le proprietà vengono date senza dimostrazione, l'enfasi essendo piuttosto sulla loro applicazione.

<sup>2</sup>Il simbolo  $\sim$  viene usato, qui e nel seguito, per indicare la versione periodica del segnale su cui opera.

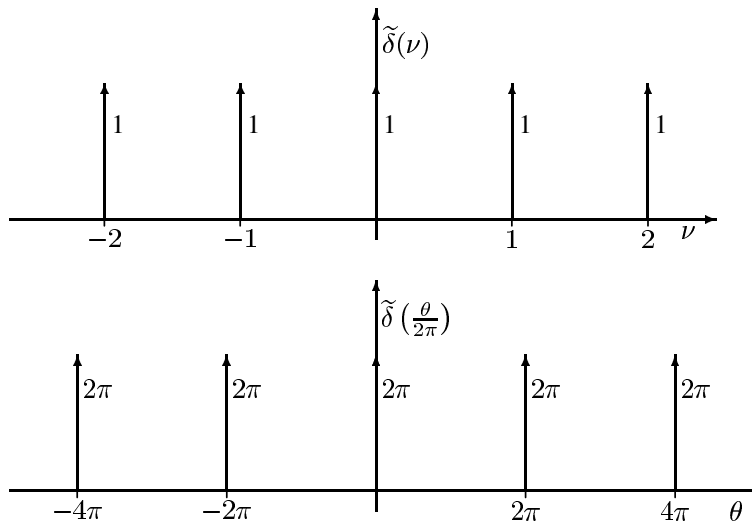


Figura 3.11: Spettro di una sequenza costante.

### 3.6.1 Linearità

È immediato verificare che la trasformata di Fourier è lineare, cioè risulta:

$$a_1 x_1(\cdot) + a_2 x_2(\cdot) \longleftrightarrow a_1 X_1(\cdot) + a_2 X_2(\cdot) \quad (3.29)$$

In altri termini lo spettro di una combinazione lineare di segnali è la combinazione lineare, con gli stessi coefficienti, dei singoli spettri (principio di sovrapposizione).

### 3.6.2 Proprietà di simmetria della trasformata di Fourier

È facile controllare che ad una riflessione nel dominio del tempo corrisponde una riflessione nel dominio della frequenza e viceversa; cioè:

$$x(-\cdot) \longleftrightarrow X(-\cdot) \quad (3.30)$$

Pertanto un segnale pari ha spettro pari e viceversa. Inoltre ad una coniugazione in un dominio corrisponde una coniugazione più una riflessione nell'altro dominio; in altri termini si ha:

$$x^*(\cdot) \longleftrightarrow X^*(-\cdot) \quad x^*(-\cdot) \longleftrightarrow X^*(\cdot) \quad (3.31)$$

Come conseguenza si ha che se  $x(\cdot)$  è reale, cioè  $x(\cdot) = x^*(\cdot)$ , allora per la (3.31) risulta  $X(\cdot) = X^*(-\cdot)$ ; una funzione che verifica questa proprietà si dice *Hermitiana* o *coniugata simmetrica*: quindi, in breve, se  $x(\cdot)$  è reale, allora  $X(\cdot)$  è Hermitiana. Evidentemente il carattere Hermitiano dello spettro è equivalente alla condizione che  $\Re\{X(\cdot)\}$  sia pari e  $\Im\{X(\cdot)\}$  sia dispari; ovvero è equivalente alla condizione che lo spettro d'ampiezza sia pari e quello di fase dispari. Quindi, quando si calcola o si rappresenta la trasformata di Fourier di un segnale reale, parte reale e immaginaria, ovvero modulo e fase, dello spettro possono essere calcolati o rappresentati solo per frequenze positive, poiché i valori per frequenze negative sono ricavabili per simmetria coniugata. Se  $x(\cdot)$  oltre che reale è anche pari, allora dalla (3.30) segue che anche lo spettro è pari oltre che hermitiano e quindi lo spettro è puramente reale: pertanto se  $x(\cdot)$  è reale e pari, anche  $X(\cdot)$  è reale e pari.

### 3.6.3 Cambiamento di scala

Analizziamo l'effetto nel dominio della frequenza di un cambiamento di scala dell'asse dei tempi. Per segnali a tempo continuo è immediato verificare che si ha:

$$x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right) \quad (3.32)$$

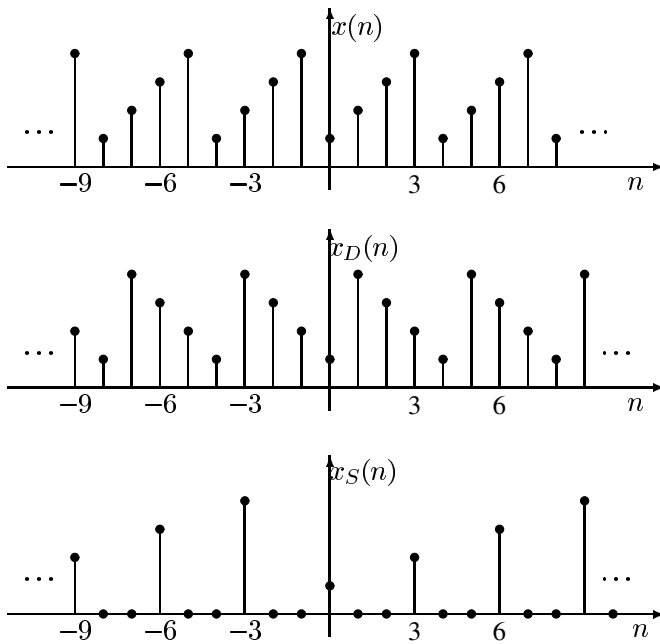


Figura 3.12: Sequenza originaria  $x(n)$ , decimata  $x_D(n)$  ed espansa  $x_S(n)$  per  $N$  ( $N = 3$ ).

La proprietà (3.32) comporta che ad una compressione nel dominio del tempo ( $|a| < 1$ ) corrisponde un'espansione dello spettro e viceversa. Notiamo anche che oltre al cambiamento della scala delle frequenze si ha anche un cambiamento della scala delle ordinate (ampiezze) in modo che l'area sottesa dallo spettro resti costante: tale area infatti è pari al valore nell'origine  $x(0)$ , che non si modifica per effetto del cambiamento della scala dell'asse dei tempi.

Nel caso di sequenze, atteso il carattere discreto del tempo, l'operazione di cambiamento di scala va opportunamente interpretata. Precisamente, supposto il fattore di scala positivo, in quanto, analogamente a quanto si verifica per i segnali a tempo continuo, il segno del fattore di scala tiene conto di un eventuale ribaltamento in aggiunta al cambiamento di scala vero e proprio, la compressione dell'asse dei tempi porta a considerare la sequenza  $x_D(n) = x(nN)$ , cioè la sequenza:

$$\dots, x(-2N), x(-N), x(0), x(N), x(2N), \dots$$

ottenuta da  $x(n)$  prendendo un campione ogni  $N$ : tale operazione è detta *decimazione* per  $N$  (fig. 3.12). Poiché la decimazione comporta in genere una perdita d'informazione, l'effetto sullo spettro non è un semplice cambiamento di scala come verrà mostrato più in seguito.

Consideriamo ora l'espansione dell'asse dei tempi, cioè prendiamo in esame la sequenza  $x_S(n) = x[n/N]$ , con  $N$  intero non nullo. La scrittura  $x[n/N]$  è convenzionale e come debba essere interpretata è chiarito in fig. 3.12: per  $n$  multiplo di  $N$ ,  $x_S(n)$  è il campione della sequenza originaria all'istante  $n/N$  (ad esempio, con riferimento al caso di fig. 3.12, ove  $N = 3$ ,  $x_S(3) = x(1)$ ,  $x_S(6) = x(2)$  e così via), mentre viene posto uguale a zero per gli altri valori di  $n$ ; in altri termini, quando il valore dell'argomento  $n/N$  non è intero,  $x[n/N]$  è per convenzione zero; l'impiego delle parentesi quadre invece delle tonde nel denotare la sequenza espansa, con fattore di espansione  $N$ , e cioè la notazione  $x[n/N]$  ricorda che trattasi di scrittura convenzionale. Trascurando i dettagli analitici, si ricava

$$x_S(n) = x \left[ \frac{n}{N} \right] \longleftrightarrow X(N\nu)$$

La relazione ottenuta è quindi simile a quella valida per i segnali a tempo continuo, salvo il fatto che le ampiezze dello spettro non vengono alterate. L'effetto nel dominio della frequenza è illustrato nella fig. 3.13, sempre per il caso  $N = 3$ . Si noti che la trasformata, che originariamente è periodica di periodo 1, dopo il cambiamento di scala diventa periodica di periodo  $1/3$ ; si noti inoltre che l'area totale nell'intervallo  $-1/2 = \nu \leq 1/2$  resta immutata.

Come applicazione del cambiamento di scala è immediato valutare lo spettro del segnale campionatore ideale discreto di periodo qualsiasi.

**Esempio 2:** Segnale campionatore ideale discreto di periodo  $N$



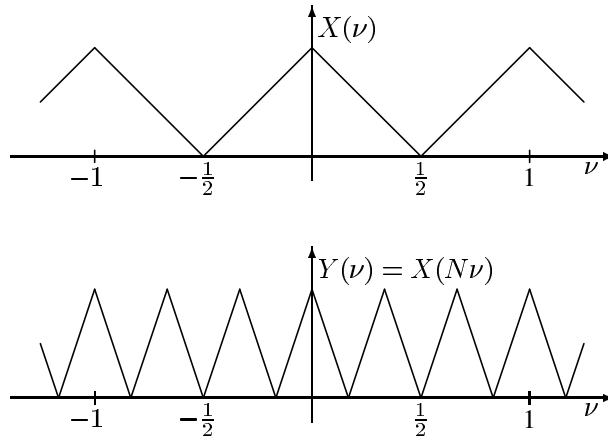


Figura 3.13: Effetto sullo spettro dell'espansione dell'asse dei tempi ( $N = 3$ ).

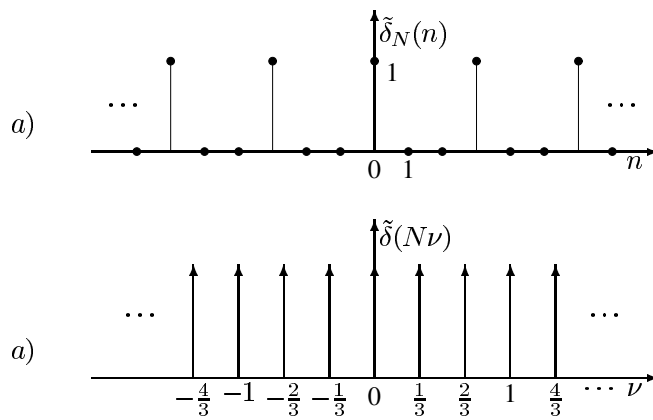


Figura 3.14: Il segnale campionario discreto e il suo spettro.

Il treno campionario ideale discreto di periodo  $N$  è il segnale:

$$\tilde{\delta}_N(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(n - kN)$$

esso è cioè un treno d'impulsi discreti di ampiezza unitaria localizzati negli istanti  $kN$ , con  $k$  intero relativo (fig. 3.14a). Poiché tale segnale può essere riguardato come un'espansione della sequenza costante  $\tilde{\delta}(n)$  avendosi:

$$\tilde{\delta}_N(n) = \tilde{\delta}\left(\frac{n}{N}\right)$$

applicando la proprietà di cambiamento di scala alla coppia segnale-spettro (3.28) si ottiene:

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_N(n) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(n - kN) \\ &\downarrow \\ \tilde{\delta}(N\nu) &= \frac{1}{N} \tilde{\delta}_{\frac{1}{N}}(\nu) = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\nu - \frac{k}{N}\right) \end{aligned} \quad (3.33)$$

cioè lo spettro di un segnale campionario ideale discreto di periodo  $N$  è ancora un treno campionario ideale, precisamente è un treno periodico di  $\delta$ -impulsi di area e periodo entrambi pari a  $1/N$  (fig. 3.14b). Il fattore d'ampiezza introdotto deriva dalla proprietà di cambiamento di scala degli impulsi di Dirac, e comunque è tale da lasciare inalterata l'area della trasformata nell'intervallo  $-1/2 = \nu = 1/2$ .

**Esempio 3:** Segnale campionario ideale di periodo  $T$

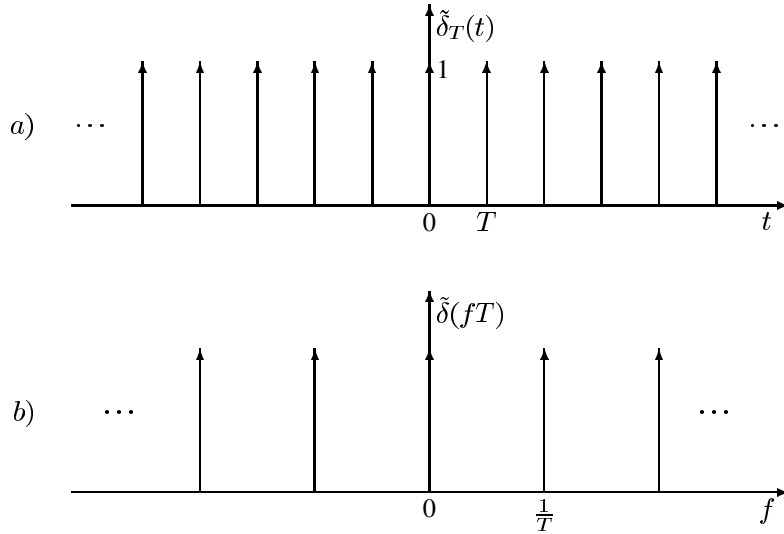


Figura 3.15: Il segnale campionatore ideale e il suo spettro.

Iniziamo col considerare il *segnale campionatore ideale* di periodo unitario  $\tilde{\delta}(t)$ , cioè il treno d'impulsi di Dirac

$$\tilde{\delta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k) \quad (3.34)$$

Applicando la procedura di trasformazione al limite, si ottiene

$$\tilde{\delta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k) \longleftrightarrow \tilde{\delta}(f) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(f - m) \quad (3.35)$$

cioè ad un treno d'impulsi di Dirac di area e periodo unitari nel tempo corrisponde un treno d'impulsi di Dirac di area e periodo unitari nella frequenza.

Consideriamo ora il segnale campionatore ideale continuo di periodo  $T$  (fig. 3.15a), cioè un treno d'impulsi di Dirac di area unitaria localizzati negli istanti  $t = kT$ :

$$\tilde{\delta}_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

Poiché tale segnale può ottenersi cambiando la scala sia delle ampiezze che dei tempi del segnale campionatore ideale di periodo unitario (3.34) avendosi:

$$\tilde{\delta}_T(t) = \frac{1}{T} \tilde{\delta}\left(\frac{t}{T}\right)$$

applicando la proprietà (3.32) alla coppia segnale-spettro (3.35) si ottiene:

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_T(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \\ &\quad \downarrow \\ \tilde{\delta}(fT) &= \frac{1}{T} \tilde{\delta}_{\frac{1}{T}}(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Lo spettro del segnale campionatore ideale di periodo  $T$  è illustrato in fig. 3.15b. ed è costituito da una successione di righe spettrali, tutte di area  $\frac{1}{T}$ , equispaziate in frequenza di  $\frac{1}{T}$ .

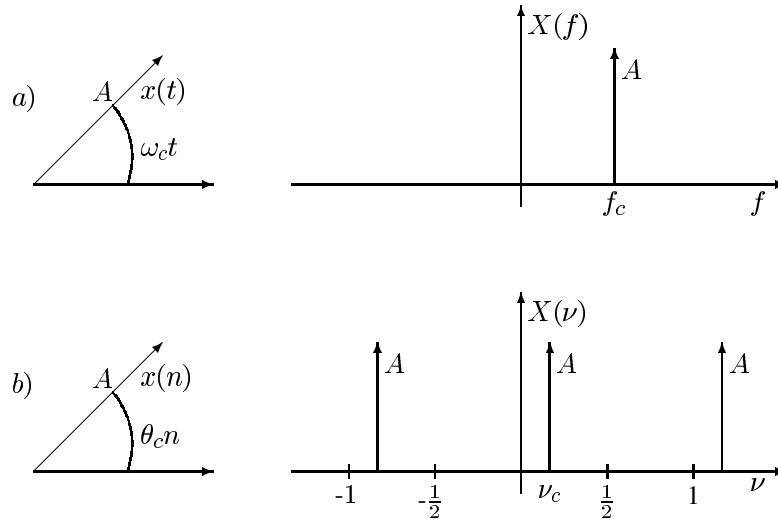


Figura 3.16: Spettro di un fasore: a) continuo b) discreto.

### 3.6.4 Traslazione nel dominio del tempo

È facile verificare che:

$$x(t - T) \longleftrightarrow X(f)e^{-j2\pi fT} \quad x(n - N) \longleftrightarrow X(\nu)e^{-j2\pi\nu N}$$

Quindi un ritardo introduce uno sfasamento lineare con ma non influisce sullo spettro d'ampiezza. Si osservi che nel caso di segnali discreti  $N$  è generalmente un numero intero, tuttavia la proprietà rimane formalmente valida anche se  $N$  è un generico numero reale. Come applicazione di questa proprietà consideriamo il seguente importante esempio.

### 3.6.5 Traslazione nel dominio della frequenza (modulazione)

È immediato verificare che:

$$x(t)e^{j2\pi f_c t} \longleftrightarrow X(f - f_c) \quad x(n)e^{j2\pi\nu_c n} \longleftrightarrow X(\nu - \nu_c) \quad (3.37)$$

#### Esempio 4: Trasformata di un fasore

Un fasore continuo  $Ae^{j2\pi f_c t}$ , tenuto conto della proprietà espressa dalla (3.37) e della trasformata di una costante (3.24), ha come spettro l'impulso di Dirac  $A\delta(f - f_c)$ ; in altri termini si ha (fig. 3.16a):

$$Ae^{j2\pi f_c t} \longleftrightarrow A\delta(f - f_c)$$

Dunque lo spettro di un fasore è una riga alla frequenza  $f_c$  del fasore di ampiezza (area) pari all'ampiezza del fasore. Analogamente, un fasore discreto  $Ae^{j2\pi\nu_c n}$  si trasforma traslando in frequenza lo spettro della sequenza costante  $A\tilde{\delta}(n)$ , pertanto si ha:

$$Ae^{j2\pi\nu_c n} \longleftrightarrow A\tilde{\delta}(\nu - \nu_c) \quad (3.38)$$

In modo analogo si può valutare lo spettro di un segnale modulato in ampiezza, cioè del prodotto di un segnale  $x(t)$  per una sinusoidale (*modulazione*). Infatti, dalla formula di Eulero e dalla proprietà di linearità, segue facilmente che:

$$x(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) \longleftrightarrow \frac{1}{2}X(f - f_c)e^{j\varphi_c} + \frac{1}{2}X(f + f_c)e^{-j\varphi_c}$$

Nel contesto della modulazione il segnale  $x(t)$  è detto segnale *modulante* e la sinusoidale segnale *portante*. L'effetto della modulazione è illustrata nella fig. 3.17 nel caso di un segnale modulante a banda limitata di tipo passa-basso, cioè  $X(f) = 0, \forall |f| > B$ , e una frequenza portante  $f_c$  molto maggiore della banda (monolatera)  $B$  del segnale modulante. Dopo la modulazione lo spettro risulta concentrato intorno alle frequenze  $+f_c$  e  $-f_c$ , quindi il segnale modulato è di tipo *passa-banda* o, come anche si dice nel caso di  $f_c$  sufficientemente elevata, *a radiofrequenza* (RF). Si noti inoltre che, per effetto della modulazione, l'occupazione totale di banda è raddoppiata, passando da  $B$  (monolatera) per il segnale modulante a  $2B$  per il segnale RF.

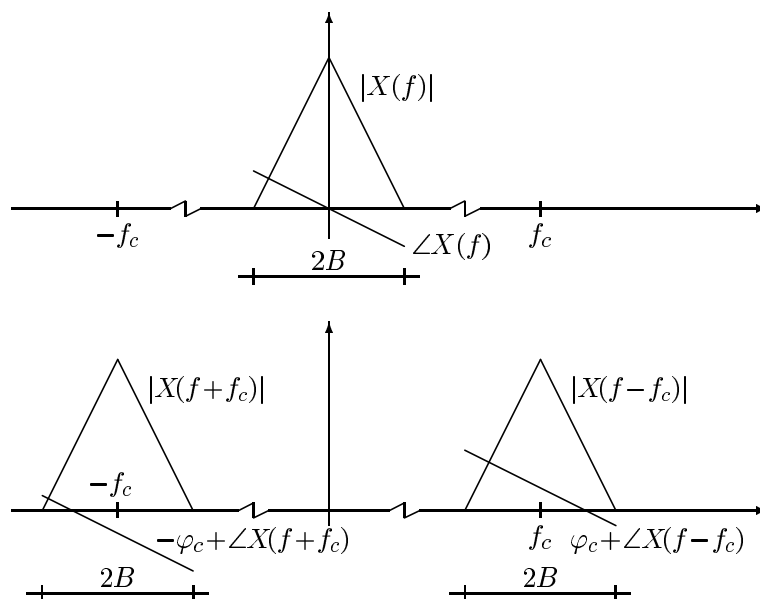


Figura 3.17: Spettri del segnale modulante (a) e del segnale modulato (b).

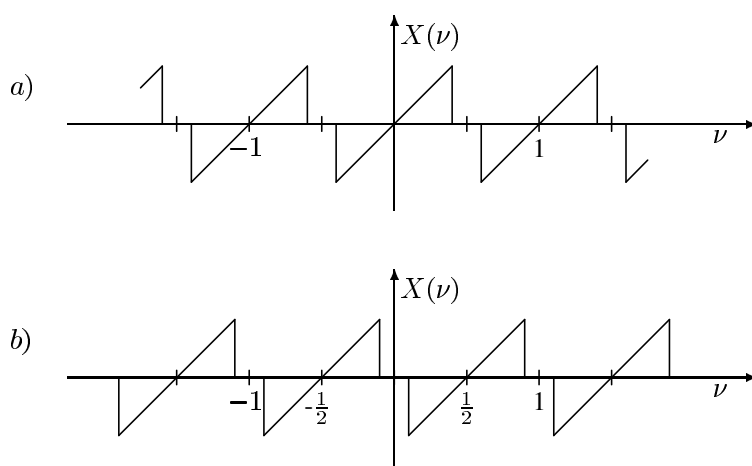


Figura 3.18: Scambio alte e basse frequenze.

**Esempio 5:** *Scambio di alte e basse frequenze*

Consideriamo il segnale modulato  $x(n)(-1)^n$ . Poiché la portante  $(-1)^n$  può essere equivalentemente riscritta come

$$(-1)^n = \cos(\pi n) = e^{j\pi n}$$

e quindi è un fasore di frequenza  $\nu = 1/2$ , dalla proprietà di traslazione in frequenza segue che:

$$x(n)(-1)^n \longleftrightarrow X\left(\nu - \frac{1}{2}\right)$$

Nell'ipotesi che  $x(n)$  sia il segnale passa-basso di fig. 3.18a, il segnale modulato ha lo spettro passa-alto di fig. 3.18b; viceversa, se  $x(n)$  è il segnale passa-alto di fig. 3.18b, il segnale modulato ha lo spettro passa-basso di fig. 3.18a. In altri termini, se un segnale viene modulato con una portante di tipo  $(-1)^n$ , il che cambia di segno ai campioni del segnale negli istanti dispari, l'effetto in frequenza è di traslare lo spettro periodico del segnale di mezzo periodo, e quindi, tenendo conto della periodicità, di scambiare fra loro le regioni dello spettro corrispondenti alle basse ed alle alte frequenze.

**Esempio 6:** *Impulso RF*

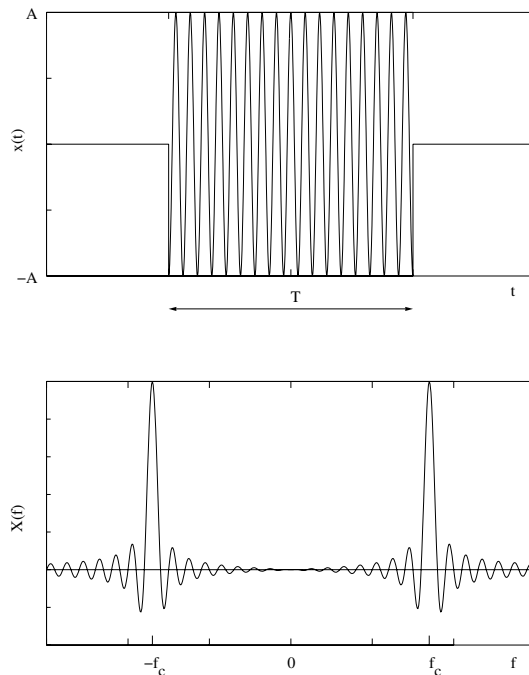


Figura 3.19: L'impulso RF e il suo spettro.

L'impulso a radiofrequenza con involucre rettangolare, cioè il segnale

$$x(t) = A\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\cos(2\pi f_c t)$$

è illustrato schematicamente in fig. 3.19; dalla (3.17) e dalla proprietà di modulazione segue che:

$$A\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\cos(2\pi f_c t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}AT\text{sinc}[(f - f_c)T] + \frac{1}{2}AT\text{sinc}[(f + f_c)T]$$

Lo spettro dell'impulso RF è riportato in fig. 3.19; al limite per  $T \rightarrow +\infty$  si ottiene la trasformata del coseno, cioè due impulsi collocati in  $f = \pm f_c$  di area  $\frac{1}{2}A$ , risulta pertanto:

$$A\cos(2\pi f_c t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}A\delta(f - f_c) + \frac{1}{2}A\delta(f + f_c)$$

### Esempio 7: L'impulso cosinusoidale

L'impulso cosinusoidale è il segnale:

$$x(t) = A\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\cos\left(\pi\frac{t}{T}\right)$$

Pertanto, ponendo  $f_c = \frac{1}{2T}$  nell'espressione dello spettro dell'impulso RF, si ottiene:

$$A\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\cos\left(\pi\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow \frac{1}{2}AT\text{sinc}\left(fT - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}AT\text{sinc}\left(fT + \frac{1}{2}\right)$$

ovvero, esplicitando la funzione sinc(·) e semplificando

$$A\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\cos\left(\pi\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow \frac{2AT}{\pi} \frac{\cos(\pi fT)}{1 - (2fT)^2}$$

Questa coppia di trasformate è illustrata in fig. 3.20. Rispetto ad un impulso rettangolare di pari durata la banda (larghezza del lobo principale) è maggiore ( $3/T$  invece di  $2/T$ ), ma, in compenso, i lobi secondari sono attenuati di almeno  $\alpha_{SL} = 23\text{dB}$  rispetto all'ampiezza del lobo principale, e decadono a zero più rapidamente, precisamente come  $f^{-2}$ , corrispondente a 12 dB/ott.

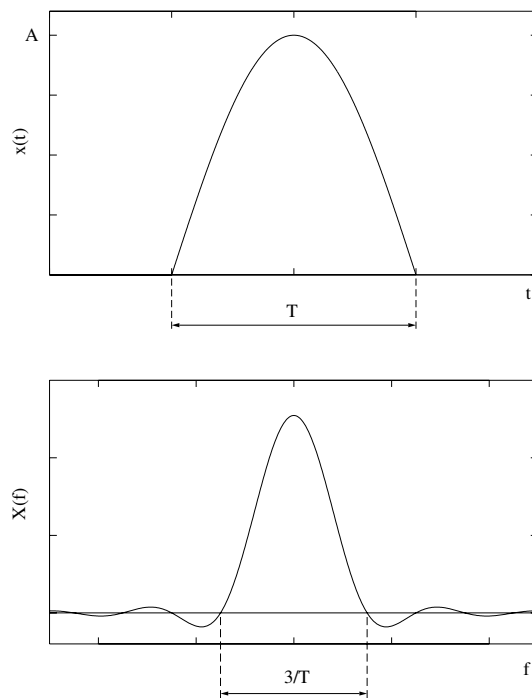


Figura 3.20: L'impulso cosinusoidale e il suo spettro.

### 3.6.6 Convoluzione

Questa è una delle proprietà più importanti della trasformata di Fourier, per i suoi riflessi sull'analisi dei sistemi; la formulazione di tale proprietà, valida sia per sequenze che per segnali continui, è la seguente:

$$x(\cdot) * y(\cdot) \longleftrightarrow X(\cdot)Y(\cdot) \quad (3.39)$$

In altri termini, alla convoluzione di due segnali nel dominio del tempo corrisponde il prodotto dei rispettivi spettri nel dominio della frequenza; si osservi che, in virtù della proprietà associativa della convoluzione e del prodotto, la proprietà è valida anche per un numero di segnali maggiore di due, ma finito.

La proprietà duale di quella della convoluzione è la proprietà di *modulazione generalizzata*: tale proprietà afferma che ad un prodotto nel dominio del tempo corrisponde una convoluzione nel dominio della frequenza. Precisamente per i segnali a tempo continuo risulta:

$$x(t)y(t) \longleftrightarrow X(f) * Y(f) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega) \quad (3.40)$$

Tale proprietà è sempre applicabile quando il prodotto nel dominio del tempo è ben definito (quindi può non essere applicabile quando ambedue i segnali contengono impulsi di Dirac) e quando essi sono separatamente trasformabili, eventualmente anche in senso generalizzato (infatti è comunque ben definita la convoluzione fra funzioni generalizzate).

Per segnali a tempo discreto la proprietà si enuncia allo stesso modo, ma l'operazione di convoluzione è diversa: precisamente è possibile dimostrare che lo spettro del prodotto di due sequenze è legato a quello delle singole sequenze da:

$$x(n)y(n) \longleftrightarrow X(\nu) * Y(\nu) = \int_{-1/2}^{+1/2} X(u)Y(\nu - u)du \quad (3.41)$$

Pertanto nel caso di sequenze la convoluzione degli spettri è l'operazione definita a secondo membro della (3.41): tale operazione, anche se denotata con lo stesso simbolo della convoluzione, differisce da quest'ultima in quanto l'integrale va esteso al periodo e diviso per il periodo stesso: per sottolineare tale diversità la convoluzione relativa a segnali periodici dello stesso periodo è detta *convoluzione periodica*. L'impiego dello stesso simbolo sottolinea però la similitudine tra le due operazioni, ed invero la convoluzione periodica gode delle stesse proprietà della convoluzione, opportuna attenzione però deve essere posta sul fatto che i fattori devono essere segnali periodici dello stesso periodo, che è anche il periodo della convoluzione.

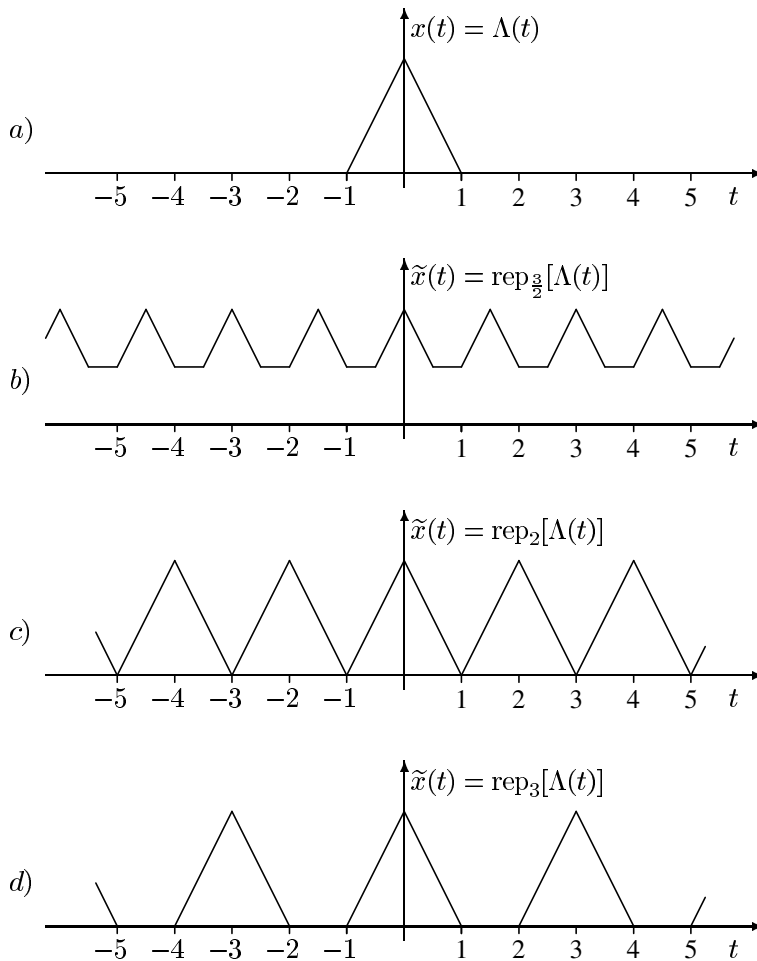


Figura 3.21: Replicazione di un impulso triangolare.

### 3.6.7 Replicazione e campionamento

Si definisce la replicazione di periodo  $T$  di  $x(t)$  il segnale:

$$\tilde{x}(t) = \text{rep}_T[x(t)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t - kT) \quad (3.42)$$

e, analogamente, nel caso di sequenze, si pone:

$$\tilde{x}(n) = \text{rep}_N[x(n)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n - kN) \quad (3.43)$$

Il segnale  $x(\cdot)$  che viene replicato è detto segnale generatore.

Si osservi che l'operazione di replicazione non è ben definita per un qualsiasi generatore  $x(\cdot)$  come è immediato verificare utilizzando, per esempio, un segnale  $x(\cdot)$  costante o periodico. Affinché l'operazione abbia senso è sufficiente che il generatore sia un segnale d'energia, ipotesi che riterremo senz'altro verificata nel seguito; tuttavia è di interesse utilizzare come generatore un impulso di Dirac: in tal caso infatti il segnale replicato è il segnale campionatore ideale,  $\tilde{\delta}_T(t)$  o  $\tilde{\delta}_N(n)$ .

Notiamo esplicitamente che il segnale  $\tilde{x}(\cdot)$ , ottenuto per replicazione, è sempre un segnale periodico con periodo pari a quello di replica,  $T$  o  $N$  a seconda del caso. A scopo esemplificativo nella fig. 3.21 sono riportati i segnali ottenuti replicando l'impulso triangolare  $\Lambda(t)$  di fig. 3.21a con periodo  $T = 3/2$  (fig. 3.21b),  $T = 2$  (fig. 3.21c) e  $T = 3$  (fig. 3.21d).

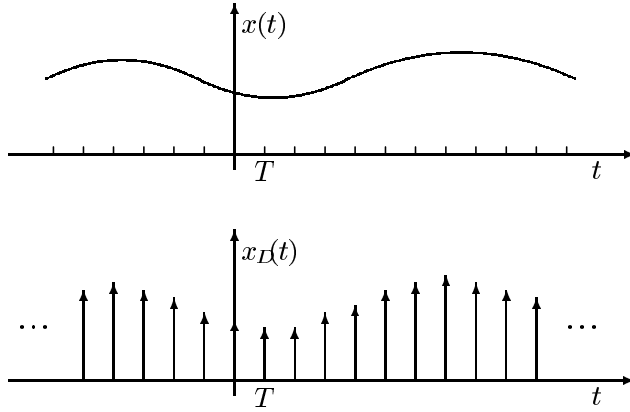


Figura 3.22: Il campionamento ideale di una forma d'onda.

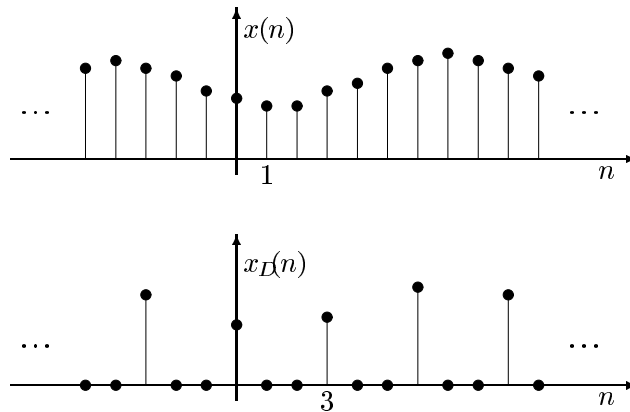


Figura 3.23: Il campionamento ideale di una sequenza.

Dato un segnale  $x(\cdot)$ , la sua versione campionata (idealmente) è il segnale (cfr. fig. 3.22):

$$x_D(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT)\delta(t - kT) \quad (3.44)$$

nel caso di segnali a tempo continuo, mentre nel caso di sequenze si pone (cfr. fig. 3.23):

$$x_D(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kN)\delta(n - kN) \quad (3.45)$$

$T$  (risp.  $N$ ) è detto periodo o passo di campionamento, ed il suo reciproco frequenza o cadenza di campionamento.

È utile riguardare le operazioni di replicazione e di campionamento come sistemi (fig. 3.24). La replicazione (fig. 3.24a) può essere realizzata con un sistema LTI in quanto le relazioni (3.42) e (3.43) possono essere riscritte come convoluzione; precisamente, come già accennato e come è immediato verificare, si ha:

$$\tilde{x}(t) = \text{rep}_T[x(t)] = x(t) * \tilde{\delta}_T(t) \quad \tilde{x}(n) = \text{rep}_N[x(n)] = x(n) * \tilde{\delta}_N(n) \quad (3.46)$$

cioè la replicazione del segnale  $x(\cdot)$  la si ottiene effettuandone la convoluzione con un treno campionario ideale, che pertanto è la risposta impulsiva. Anche il campionamento è un sistema lineare, ma temporalmente variante, avendosi

$$x_D(t) = x(t) \cdot \tilde{\delta}_T(t) \quad x_D(n) = x(n) \cdot \tilde{\delta}_N(n) \quad (3.47)$$

Usando la proprietà di convoluzione (Eq. 3.40 e Eq. 3.41) e la trasformata del segnale campionario ideale (Eq. 3.36 e Eq. 3.33), trasformando la (3.46) si ottiene:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t - kT) \longleftrightarrow \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{k}{T}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \quad (3.48)$$



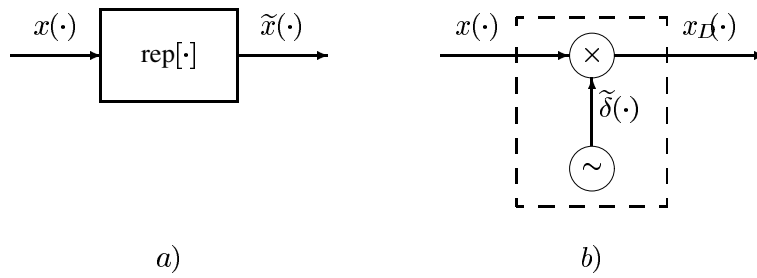


Figura 3.24: La replicazione e il campionamento come sistemi.

nel caso di segnali continui, e la:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n - kN) \longleftrightarrow \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{k}{N}\right) \delta\left(\nu - \frac{k}{N}\right) \quad (3.49)$$

nel caso di sequenze. Le relazioni precedenti si esprimono sinteticamente dicendo che ad una replicazione nel dominio del tempo corrisponde un campionamento in frequenza.

Similmente, trasformando la relazione (3.47) si ottiene:

$$X_D(f) = X(f) * \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

ovvero:

$$x_D(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT) \delta(t - kT) \longleftrightarrow X_D(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

nel caso di forme d'onda, e, analogamente nel caso di sequenze, si ha:

$$X_D(\nu) = X(\nu) * \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{k}{N}\right) = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\nu - \frac{k}{N}\right)$$