Mutua induzione

Definizione di mutua induzione

- Una induttanza produce un campo magnetico proporzionale alla corrente che vi scorre. Se le linee di forza di questo campo magnetico intersecano una seconda induttanza, in questo di produce una f.e.m. indotta proporzionale alla derivata del campo magnetico e quindi alla derivata della corrente.
- La costante di proporzionalità dipende dalla geometria delle induttanze, dalla loro posizione relativa, dal numero di spire di cui sono composte. Il suo segno dipende solamente dalle convenzioni scelte nell'orientamento dei circuiti.
- Questa costante si chiama coefficiente di mutua induzione e si indica solitamente con la lettera M.

Circuiti accoppiati

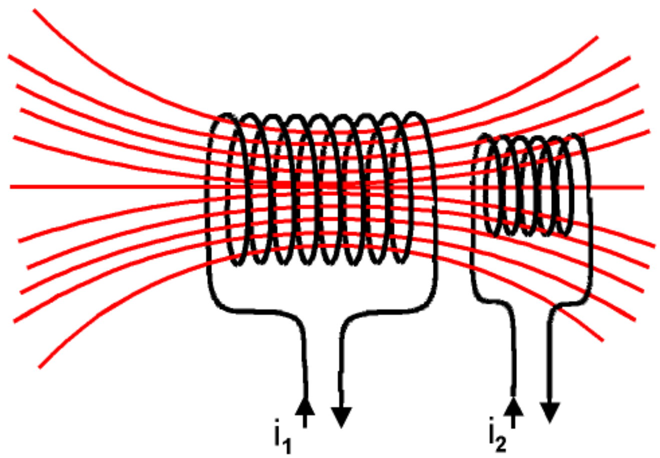
- Se nel circuito 1 scorre una corrente i_1, allora nel circuito 2 si misura una f.e.m. indotta data da:

$$V_2 = M_{12} \frac{di_1}{dt}$$

- Se al contrario nel circuito 2 scorre una corrente i_2, allora nel circuito 1 la f.e.m. vale:

$$V_1 = M_{21} \frac{di_2}{dt}$$

- Si dimostra e si verifica sperimentalmente che $M_{12}=M_{21}$.

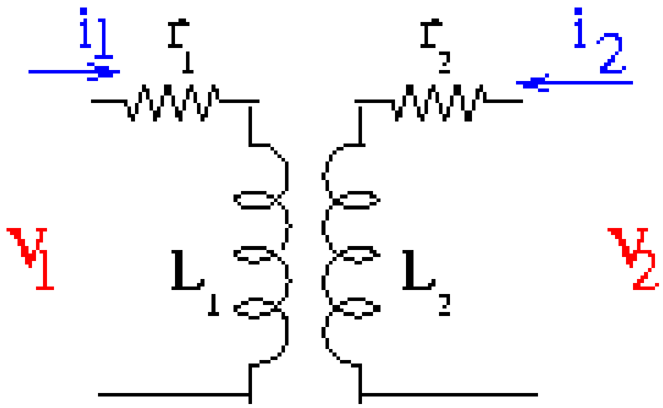


Equazioni per il circuito

- Considerando entrambi le correnti ed entrambi le induttanze, si ha:

$$V_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + r_1 i_1$$

$$V_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + r_2 i_2$$



- Adoperando il metodo simbolico, si ha:

$$V_1 = j\omega L_1 i_1 + j\omega M i_2 + r_1 i_1$$

$$V_2 = j\omega L_2 i_2 + j\omega M i_1 + r_2 i_2$$

Coefficiente di accoppiamento

- L'energia immagazzinata nel circuito vale:

$$U = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

- Pertanto, se l'energia è positiva, deve valere la relazione:

$$M^2 \leq L_1 L_2$$

- Si definisce il coefficiente di accoppiamento r come:

$$r = \frac{M^2}{L_1 L_2}$$

- Questa quantità è sempre compresa tra 0 ed 1: zero vuol dire che i circuiti sono disaccoppiati, ed uno che sono completamente accoppiati: in questo caso il flusso prodotto da uno dei due attraversa completamente l'altro.

Esempio:

- Due induttanze toroidali sono disaccoppiate, in quanto i campi magnetici prodotte da entrambi sono completamente contenuti all'interno del toro su cui sono avvolte.
- Due bobine coassiali avvolte sullo stesso supporto sono invece completamente accoppiate.
- Avvolgendo la bobina su di un supporto ferromagnetico che realizza un circuito chiuso (ad esempio, un anello), è possibile disaccoppiare l'induttanza dalle altre induttanze presenti nelle vicinanze (le linee di campo restano confinate all'interno del supporto).
- Al contrario, avvolgendo due bobine sullo stesso supporto ferromagnetico si può realizzare accoppiamento completo.

Induttanze in serie:

- Date le equazioni di due induttanze accoppiate, allora se vengono poste in serie, la d.d.p. ai loro capi si somma, mentre la corrente è la stessa:

$$i_1 = i_2 = i \qquad V = V_1 + V_2$$

$$V_1 = (L_1 + M)\frac{di}{dt} + r_1 i \quad V_2 = (L_2 + M)\frac{di}{dt} + r_2 i$$

- Pertanto l'induttanza risultante è

$$L_s = L_1 + L_2 + 2M$$

  - A seconda del segno di M, l'induttanza può risultare maggiore o minore della somma. Per due bobine avvolte sullo stesso supporto, l'induttanza vale 0 o 4 L, a seconda della direzione di avvolgimento. La resistenza interna si somma sempre.

Induttanze in parallelo:

- In questo caso, il conto è complicato: nel caso generale, l'impedenza risultante ha un andamento che è una funzione complicata della frequenza. Trascurando le resistenze interne i conti si semplificano.
- Stavolta la caduta di potenziale è la stessa, ma la corrente è diversa:

$$V = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$
$$i = i_1 + i_2$$

- Risolvendo, si ha:

$$L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

Modifiche all’induttanza

- La presenza di materiali conduttori in prossimità di un induttore può provocare correnti parassite all’interno di questi. In questo caso, si ha che:
  - L’induttanza risulta differente, in quanto le correnti parassite inducono a loro volta una f.e.m. nell’induttore. Le correnti indotte tendono a fare diminuire il campo magnetico, e pertanto l’autoinduttanza risulta minore .
  - Le correnti parassite dissipano energia per effetto Joule. Questa energia proviene in ultima analisi dal generatore che alimenta l’induttore. Come risultato, la dissipazione risulta maggiore di quella che si avrebbe tenendo conto della sola resistenza interna dell’induttore.

Esempio

- Supponiamo di fare scorrere una corrente variabile i_1 in una induttanza L_1, accoppiata ad un’altra induttanza L_2 cortocircuitata su se stessa.
- supponendo trascurabili le resistenze interne, ponendo $V_2=0$ si ha:

$$i_2 = -\frac{M}{L_2} i_1$$

- e quindi l’equazione del circuito 1 risulta:

$$V_1 = j\omega \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right) i_1$$

- L’induttanza apparente del circuito 1 è allora:

$$L'_1 = L_1 (1 - r)$$

Il trasformatore

- Il trasformatore è formato da due bobine di N1 ed N2 spire, isolate tra di loro, avvolte in modo da avere accoppiamento totale su uno stesso supporto metallico.
- In questo caso r=1 e quindi:

$$M = \sqrt{L_1 L_2}$$

- La bobina con N1 spire è detta primario, e quella con N2 spire secondario.
- Il supporto metallico (detto nucleo) è realizzato in materiale ferromagnetico ed è di forma tale da contenere completamente il campo magnetico al suo interno.

Rapporto di trasformazione a vuoto

- Se al primario viene applicata una tensione Vp, allora su questo scorrerà una corrente

$$I = V_p / j\omega L_1$$

- Ai capi del secondario vi sarà allora una tensione indotta V

$$V_s = j\omega M I = \frac{M}{L_1} V_p = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} V_p$$

- Ma ricordiamo che l'induttanza di un avvolgimento è proporzionale al quadrato del numero di spire! si ha allora approssimativamente

$$V_s = \frac{N_2}{N_1} V_p$$

Il trasformatore reale:

- Nel trasformatore reale diverse cose contribuiscono a cambiare la formula precedente:
  - Nel secondario di solito scorre corrente, che influenza la corrente che scorre nel primario.
  - Nel nucleo di ferro si generano correnti parassite, dette correnti di Foucault, che vengono ridotte ma non eliminate costruendo il nucleo con lamine di ferro isolate tra di loro.
  - Inoltre il nucleo possiede una certa isteresi: come si sa, per percorrere il ciclo di isteresi il materiale assorbe energia.
  - In conseguenza di questi effetti, il trasformatore si scalda ed all’atto pratico non è in grado di erogare più di una certa potenza.

Potenza

- Supponiamo di avere un elemento circuitale con impedenza $Z = |Z| e^{i\phi}$
- La potenza assorbita dall'elemento sarà

$$W = V \cdot I = V_0 \cos(\omega t) I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

- Ovviamente una espressione del genere è poco interessante, in quanto varia rapidamente con il tempo e non fornisce indicazioni molto utili. Piuttosto vogliamo conoscere la potenza media assorbita:

$$\overline{W} = V_0 I_0 \overline{\cos(\omega t)\cos(\omega t + \varphi)} = V_0 I_0 \overline{\cos(\omega t)[\cos(\omega t)\cos(\varphi) - \sin(\omega t)\sin(\varphi)]} =$$

$$= \frac{1}{2} V_0 I_0 \cos(\varphi)$$

Notazione complessa

- Possiamo adoperare la notazione complessa anche per il calcolo della potenza:

$$\overline{W} = \frac{1}{2} V_0 I_0 \cos\varphi = \frac{1}{2} V_0 I_0 \frac{\mathrm{Re}(Z)}{|Z|} = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(\frac{V_0 I_0 Z}{|Z|} \right) =$$

$$\frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(I_0^2 Z\right) = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(\tilde{I}\tilde{I}^* Z\right) = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(\tilde{V}\tilde{I}^*\right) = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(\tilde{V}^*\tilde{I}\right)$$

- La forma più comoda da adoperare è invece:

$$W = \frac{1}{2} I_0^2 \,\mathrm{Re}(Z) = \frac{1}{2} V_0^2 \,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{Z}\right)$$

Esempi....

- Resistenza:

$$\mathrm{Re}(Z) = R \rightarrow \overline{W} = \frac{1}{2} R I^2$$

- Condensatore:

$$\mathrm{Re}(Z) = 0 \rightarrow \overline{W} = 0$$

- Induttanza:

$$\mathrm{Re}(Z) = r \rightarrow \overline{W} = \frac{1}{2} r I^2$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{Z}\right) = \frac{r}{r^2 + \omega^2 L^2} \rightarrow \overline{W} = \frac{1}{2} \frac{V^2 r}{r^2 + \omega^2 L^2}$$

Potenza nel trasformatore

- A circuito aperto, il primario si comporta come una semplice induttanza:

$$W_1 = \frac{1}{2} r_1 I_1^2 = \frac{V_1^2}{r^2 + \omega^2 L^2}$$

- Se si cortocircuita il secondario su una resistenza R, allora si ha:

$$i_2 = -\frac{j\omega M}{r_2 + R + j\omega L_2} i_1$$

$$V_1 = j\omega L_1 i_1 + j\omega M i_2 + r_1 i_1$$

$$0 = j\omega L_2 i_2 + j\omega M i_1 + (r_2 + R) i_2$$

$$V_1 = j\omega L_1 i_1 + r_1 i_1 + \frac{\omega^2 M^2}{r_2 + R + j\omega L_2} i_1$$

- e infine

$$W = \frac{1}{2} i_1^2 \left(r_1 + \omega^2 M^2 \frac{r + R}{(r + R)^2 + \omega^2 L_2^2} \right)$$