Formulario di Onde

O.1 Proprietà elastiche dei solidi (per piccole deformazioni)

Legge di Hooke: $F = k|\Delta l|$

Energia potenziale elastica: $U = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2$

Carico specifico o sforzo: $\sigma = \frac{F}{A}$, la forza F è applicata perpendicolarmente alla superficie A

Allungamento lineare o deformazione specifica: $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$

Modulo di Young o modulo di elasticità: $Y = \frac{\sigma}{\varepsilon} = k\frac{l_0}{A}$

$$\Delta l = \varepsilon l_0 = \frac{\sigma}{Y} l_0$$
$$l = l_0 + \Delta l = l_0 \left(1 + \frac{\sigma}{Y}\right)$$

l_0 = lunghezza a riposo
Δl = allungamento sotto l'effetto di σ

Un solido che, sottoposto alla forza F, subisce una deformazione longitudinale Δl, subisce anche una deformazione trasversale Δr tale che: $\Delta r/r = -\nu(\Delta l/l)$, dove ν è il *coefficiente di Poisson* ($0 < \nu < 0.5$, caratteristico di ogni materiale).

Modulo di rigidità o di taglio: $G = \frac{Y}{2(1+\nu)}$

Deformazione per scorrimento:

$$\sigma = \frac{F}{A} = G\theta$$

F è applicata tangenzialmente alla superficie A
θ = angolo di deformazione

Deformazione (di una sbarra cilindrica) per torsione:

$$M = k\theta \qquad k = \frac{\pi}{2}G\frac{r^4}{l}$$

M = momento torcente
θ = angolo di torsione
r, l = raggio e lunghezza della sbarra

Modulo di compressibilità isoterma: $\beta_T = \frac{Y}{3(1-2\nu)}$

Compressione uniforme (a temperatura costante): $\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta p}{\beta_T}$

O.2 Equazione delle onde (equazione di d'Alembert) in tre dimensioni

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

v è la velocità di propagazione.
Vale il principio di sovrapposizione: una qualsiasi combinazione lineare di soluzioni è, a sua volta, una soluzione dell'equazione delle onde.
Soluzione generale in una dimensione:

$$\xi(x,t) = \xi_1(x - vt) + \xi_2(x + vt)$$

ξ_1 = onda progressiva
ξ_2 = onda regressiva

O.3 Propagazione delle onde nei mezzi materiali

Onde elastiche longitudinali in una sbarra solida sottile

velocità di propagazione: $v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$

Y = Modulo di Young
ρ = densità di massa

Onde elastiche trasversali/torsionali in una sbarra solida

velocità di propagazione: $v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$

G = Modulo di rigidità
ρ = densità di massa

Onde elastiche in una corda tesa

velocità di propagazione: $v = \sqrt{\frac{T}{\rho_l}}$

T = Tensione
ρ_l = densità lineare di massa

Onde elastiche in una membrana tesa

velocità di propagazione: $v = \sqrt{\frac{T}{\rho_\Sigma}}$

T = Tensione superficiale (forza per unità di lunghezza)
ρ_Σ = densità superficiale di massa

Onde in un gas

p_0 = pressione media	ρ_0 = densità di massa media
T = temperatura assoluta	V = volume
R = costante dei gas	A = massa molare
γ = costante adiabatica	n = numero di moli

Modulo di compressibilità: $\beta = -V\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V} = \rho\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}$

Per un gas ideale ($pV = nRT$):

$$\text{Modulo di compressibilità} \begin{cases} \text{isoterma:} \quad \beta_T = p \\ \text{adiabatica:} \quad \beta_S = \gamma p \end{cases}$$

velocità di propagazione dell'onda: $v = \sqrt{\frac{\beta}{\rho_0}}$

Nelle situazioni più comuni la propagazione di un'onda in un gas avviene in condizioni adiabatiche, quindi $\beta \to \beta_S$:

$$v = \sqrt{\frac{\beta_S}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{A}}$$

Onde sulla superficie di un liquido
velocità di propagazione:

$$v = \sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\tau}{\rho\lambda}\right)\tanh\frac{2\pi h}{\lambda}}$$

λ = lunghezza d'onda
ρ = densità del liquido
h = profondità del liquido
τ = tensione superficiale
g = accelerazione di gravità

O.4 Onde armoniche

Onda piana armonica progressiva

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin\big(k(x - vt) + \phi\big) = \xi_0 \sin(kx - \omega t + \phi)$$

ξ_0 = ampiezza (costante)
k = numero d'onda [unità di mis.: rad/m]
ω = pulsazione [unità di mis.: rad/s]
$kx - \omega t + \phi$ = fase (ϕ = costante arbitraria)

$$\omega = kv \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \omega = 2\pi\nu \qquad \lambda = vT = \frac{v}{\nu} \qquad v = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu$$

Altre espressioni equivalenti:

$$\begin{aligned} \xi(x,t) &= \xi_0 \sin(kx - \omega t + \phi) = \xi_0 \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) + \phi\right] = \\ &= \xi_0 \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) + \phi\right] = \xi_0 \sin\left[\frac{2\pi}{T}\left(\frac{x}{v} - t\right) + \phi\right] \end{aligned}$$

Le espressioni per un'onda armonica regressiva si ottengono dalle precedenti con la sostituzione $(x - vt) \to (x + vt)$

Onda armonica piana in tre dimensioni

$$\xi(\vec{r},t) = \xi_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \qquad \vec{k}\cdot\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z \qquad \lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|}$$

Potenza di un'onda armonica
In una corda tesa:
spostamento: $s = A\sin(kx - \omega t)$

potenza istantanea (T = tensione) : $P = -T\dfrac{\partial s}{\partial x}\dfrac{\partial s}{\partial t} = TA^2\omega k\cos^2(kx - \omega t)$

densità lineare di energia meccanica: $w_l = \dfrac{\mathrm{d}U_{\text{mecc}}}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{2}\rho_l\omega^2A^2$

potenza media: $P_m = \dfrac{1}{2}T\omega kA^2 = \dfrac{1}{2}v^2\rho_l\omega kA^2 = \dfrac{1}{2}\rho_l\omega^2A^2v = w_lv$

Intensità: $I = P_m = w_lv$ [unità di mis.: W]

In una sbarra solida o in un gas (Σ = sezione della sbarra o del tubo di gas)
spostamento: $s = A\sin(kx - \omega t)$

potenza istantanea: $P = \rho\omega^2A^2v\Sigma\cos^2(kx - \omega t)$

densità (volumica) di energia meccanica: $w_\tau = \dfrac{1}{2}\rho\omega^2A^2$

potenza media: $P_m = \dfrac{1}{2}\rho\omega^2A^2v\Sigma = w_\tau v\Sigma$

Intensità: $I = \dfrac{1}{\Sigma}\left(\dfrac{\mathrm{d}U_{\text{mecc}}}{\mathrm{d}t}\right)_m = \dfrac{P_m}{\Sigma} = w_\tau v$ [unità di mis.: $\dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$]

Su una superficie (membrana elastica o superficie di un liquido)

potenza media: $P_m = w_\Sigma vl$ (w_Σ = densità superficiale di energia meccanica, l = sezione lineare dell'onda)

Intensità: $I = \dfrac{1}{l}\left(\dfrac{\mathrm{d}U_{\text{mecc}}}{\mathrm{d}t}\right)_m = \dfrac{P_m}{l} = w_\Sigma v$ [unità di mis.: $\dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}}$]

Onda sonora in un gas

Onda di spostamento: $s = A\sin(kx - \omega t)$

potenza media: $P_m = \frac{1}{2}\beta\omega k A^2\Sigma = \frac{1}{2}\rho_0\omega^2 A^2 v\Sigma = w_\tau v\Sigma$

Onda di pressione:

$\Delta p = -\beta\frac{\partial s}{\partial x} = \rho_0 v\omega A\sin\left(kx - \omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -\rho_0 v\omega A\cos(kx - \omega t)$

$(\Delta p)_{max} = \rho_0 v\omega A = 2\pi\rho_0\nu v A$

Intensità: $I = w_\tau v = \frac{1}{2}\rho_0\omega^2 A^2 v = \frac{(\Delta p)^2_{max}}{2\rho_0 v}$

livello sonoro: $B = 10\log\frac{I}{I_0}$ $\quad$ I_0 = soglia di udibilità, log = logaritmo decimale.

Velocità del suono in aria ($p = 1$ atm, $T = 20°$C): $c_s = 343$ m/s

---

Onde sferiche (armoniche)

$$\xi(r,t) = \frac{\xi_0}{r}\sin(kr - \omega t) \qquad \text{(onda progressiva)}$$

Potenza media: $P_m = I(r)\Sigma(r) = 4\pi C\xi_0^2$ $\quad$ C = costante, dipende dalla natura dell'onda

Intensità: $I(r) = \frac{P_m}{\Sigma(r)} = \frac{P_m}{4\pi r^2} = \frac{I_0}{r^2}$ $\quad$ $I_0 = \frac{P_m}{4\pi}$

Onda sferica sonora:

$\Delta p = \frac{\rho_0 v\omega A}{r}\cos(kr - \omega t)$ $\qquad$ $I(r) = \frac{1}{2}\rho\omega^2\frac{A^2}{r^2}v$

Onde cilindriche (armoniche)

$$\xi(r,t) = \frac{\xi_0}{\sqrt{r}}\sin(kr - \omega t) \qquad \text{(onda progressiva)}$$

Potenza media: $P_m = I(r)\Sigma(r) = C\xi_0^2 2\pi h$ $\quad$ C = costante, dipende dalla natura dell'onda

Intensità: $I(r) = \frac{P_m}{\Sigma(r)} = \frac{I_0}{r}$

O.5 Analisi di Fourier

Funzione di una variabile $f(u)$ periodica con periodo U: $f(u+U) = f(u)$.

$$f(u) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\Big(a_m\cos(mwu) + b_m\sin(mwu)\Big) \qquad w = \frac{2\pi}{U}$$

$$a_0 = \frac{1}{U}\int_0^U f(u)\mathrm{d}u \qquad a_m = \frac{2}{U}\int_0^U f(u)\cos(mwu)\mathrm{d}u$$

$$b_m = \frac{2}{U}\int_0^U f(u)\sin(mwu)\mathrm{d}u$$

Funzione non periodica: $f(u) = \int_0^\infty \Big[a(w)\cos(wu) + b(w)\sin(wu)\Big]\mathrm{d}w$

$$a(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos(wu)\mathrm{d}u \qquad b(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\sin(wu)\mathrm{d}u$$

O.6 Battimenti:

Sovrapposizione di due onde armoniche con diversa frequenza (stessa ampiezza)

$$s_1 = A\sin(\omega_1 t) \qquad\qquad s_2 = A\sin(\omega_2 t)$$

$$s = s_1 + s_2 = 2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right) = 2A\cos(\Omega t)\sin(\omega t)$$

Frequenza di battimento (modulazione di ampiezza percepita da un osservatore quando le frequenze sono molto simili tra loro):

$$\nu_b = \nu_1 - \nu_2 = \frac{\omega_1-\omega_2}{2\pi}$$

O.7 Effetto Doppler

c_s: velocità del suono nel mezzo
v_T velocità del trasmettitore (sorgente), diretta verso destra
v_R velocità del ricevitore (osservatore), diretta verso destra

Per $v_T < c_s$, $v_R < c_s$:

Se il ricevitore precede il trasmettitore: $\nu_R = \nu_T \dfrac{c_s - v_R}{c_s - v_T}$ $\qquad \mathrm{T}\bullet\xrightarrow{\vec{v}_T} \quad \mathrm{R}\bullet\xrightarrow{\vec{v}_R}$

Se il trasmettitore precede il ricevitore: $\nu_R = \nu_T \dfrac{c_s + v_R}{c_s + v_T}$ $\qquad \mathrm{R}\bullet\xrightarrow{\vec{v}_R} \quad \mathrm{T}\bullet\xrightarrow{\vec{v}_T}$

Per velocità dirette verso sinistra basta cambiare il segno nelle formule precedenti.
Se le velocità $\vec{v}_R$ e $\vec{v}_T$ non sono dirette lungo la congiungente trasmettitore-ricevitore, nelle formule precedenti bisogna usare le componenti delle velocità lungo la congiungente stessa.

O.8 Onda d'urto

Per $v_T > c_s$, angolo di semiapertura del cono sonico: $\sin\theta = \dfrac{c_s}{v_T}$

numero di Mach $= \dfrac{v_T}{c_s}$

O.9 Pacchetti d'onda

$$\Delta k \Delta x \geq 2\pi \qquad\qquad \Delta\omega\Delta t \geq 2\pi \qquad\qquad \Delta\nu\Delta t \geq 1$$

Si definisce la **relazione di dispersione** (relazione tra la frequenza angolare e la lunghezza d'onda: $\omega(k) = v_f(k)k$
Velocita' di fase: $v_f = \omega/k$.
Se v_f è costante (cioè indipendente da k), il mezzo è **non dispersivo**: tutte le onde, indipendentemente da λ, hanno la stessa velocità di propagazione.
Se v_f dipende da k il mezzo è **dispersivo**. Il pacchetto si deforma e avanza con la velocità di gruppo:

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = v_f + k\frac{\mathrm{d}v_f}{\mathrm{d}k} = v_f - \lambda\frac{\mathrm{d}v_f}{\mathrm{d}\lambda} = v_f + \nu\frac{\mathrm{d}v_f}{\mathrm{d}\nu}$$

In un mezzo non dispersivo $v_g = v_f$.

O.10 Interferenza

Nel punto P giungono due onde emesse (stessa frequenza e lunghezza d'onda), rispettivamente, da una sorgente a distanza x_1 e da un'altra a distanza x_2 da P,
$\xi_1(P,t) = A_1\cos(\omega t - kx_1 - \phi_1) = A_1\cos(\omega t + \alpha_1)$
$\xi_2(P,t) = A_2\cos(\omega t - kx_2 - \phi_2) = A_2\cos(\omega t + \alpha_2)$

$$\xi(P,t) = \xi_1(P,t) + \xi_2(P,t) = A\cos(\omega t + \alpha)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2)} = \sqrt{A_1^2 + A_2^1 + 2A_1A_2\cos\delta}$$

$$\tan\alpha = \frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2}$$

Interferenza costruttiva: $\delta = \alpha_1 - \alpha_2 = 2n\pi \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
Interferenza distruttiva: $\delta = \alpha_1 - \alpha_2 = (2n+1)\pi \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Intensità:

$$I(P) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta$$

Nel caso particolare di due onde di uguale ampiezza $A_1 = A_2 = A_0$:

$$A = 2A_0\cos\frac{\delta}{2} \qquad \alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \qquad I = 4I_0\cos^2\frac{\delta}{2}$$

O.11 Onde stazionarie

Onde stazionarie unidimensionali

$$s(x,t) = A\sin kx\cos\omega t$$

Corda tesa di lunghezza L con gli estremi entrambi fissi, **colonna di gas** chiusa ad entrambe le estremità (o aperta ad entrambe le estremità):
Serie armonica: $\nu_m = m\frac{v}{2L} = m\nu_1, \quad \lambda_m = \frac{2L}{m}, \quad k_m = m\frac{\pi}{L} \qquad m = 1, 2, \dots$

Se la corda (o colonna di gas) ha gli estremi in $x = 0$ e $x = L$:

$$\left.\begin{array}{l} \text{posizione dei ventri: } x = (2m'+1)\frac{\lambda}{4} = (2m'+1)\frac{\pi}{2k} \\ \text{posizione dei nodi: } x = m'\frac{\lambda}{2} = m'\frac{\pi}{k} \end{array}\right\} \quad m' = 0, 1, 2, \dots$$

Corda tesa di lunghezza L con un'estremità libera ed una fissa, **colonna di gas** con un'estremità chiusa ed una aperta:
Serie armonica:
$\nu_m = (2m+1)\frac{v}{4L} = (2m+1)\nu_1, \qquad \lambda_m = \frac{4L}{2m+1}, \qquad m = 0, 1, 2, \dots$

Onde stazionarie in due dimensioni
Membrana rettangolare tesa, tensione T (forza per unità di lunghezza, [N/m]), densità superficiale di massa σ. All'equilibrio la membrana è ferma sul piano xy ($z = 0$), investita da un'onda vibra in direzione z.
La velocità di propagazione è $v = \sqrt{T/\sigma}$
Onde stazionarie:

$$z(x,y,t) = A\sin(k_x x)\sin(k_y y)\sin(\omega t) \qquad \begin{array}{c} k_x = n_x\frac{\pi}{L_x}, \quad k_y = n_y\frac{\pi}{L_y} \\ n_x, n_y = 1, 2, 3 \dots \end{array}$$

(L_x e L_y sono le lunghezze della membrana in direzione x e y)

Vettori d'onda: $k_{n_x,n_y} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \pi\sqrt{\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2}} = \frac{2\pi}{\lambda_{n_x,n_y}}$

Frequenze di vibrazione: $\nu_{n_x,n_y} = \frac{v}{2\pi}k_{n_x,n_y} = \frac{v}{2}\sqrt{\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2}}$