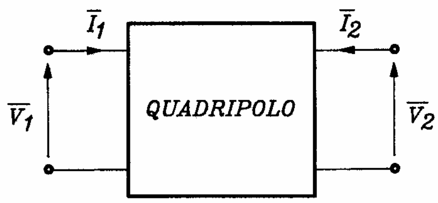
I QUADRIPOLI

1.1 Quadripoli e modelli

Viene definita quadripolo una rete elettrica comunque complessa, in grado di scambiare segnali con il mondo esterno mediante quattro morsetti.
In base alla definizione precedente sono quadripoli gli amplificatori, i trasformatori, le reti passive a scala e altri semplici circuiti. Si noti tuttavia come anche un'intera apparecchiatura complessa sia riconducibile ad un quadripolo (ad esempio un intero radiotrasmettitore), anche se, in questi casi, si cerca di decomporre il circuito complessivo in una connessione di blocchi più semplici (ancora riconducibili a quadripoli), in modo da permetterne un'analisi o una sintesi più semplici.
La teoria dei quadripoli tratta questi ultimi come *scatole nere,* di cui non interessa quindi il contenuto ma soltanto le relazioni fra le grandezze elettriche ai morsetti di ingresso e uscita. Questo approccio porta a definire una serie di relazioni che permettono di semplificare e sistematizzare l'analisi di una connessione comunque complessa di blocchi elementari. La conoscenza della struttura interna delle «scatole» è necessaria solo nella fase finale dell'analisi, quando occorre cioè esplicitare l'uscita complessiva in funzione dell'ingresso, evidenziando il contributo dei singoli componenti circuitali. Tuttavia, le reti complesse sono spesso costruite collegando fra di loro blocchi funzionali di identica struttura interna, per cui è necessario svolgere l'analisi dettagliata una sola volta; secondariamente, almeno per quanto riguarda i circuiti più ricorrenti, la legge che ne governa il funzionamento è già nota e reperibile sulla letteratura specializzata (un esempio tipico è costituito dai filtri passivi *LC)*

Definizioni di base sui quadripoli e loro classificazione

Nel seguito del paragrafo identificheremo il generico quadripolo mediante un blocco dotato dì due coppie di morsetti, rispettivamente di ingresso e di uscita, così come illustrato nella figura seguente.



Il verso convenzionale delle grandezze elettriche è quello indicato in figura. In particolare, si devono intendere come positive le correnti *entranti* nel quadripolo.
Dato che, in un quadripolo, interessa solo la relazione fra le grandezze elettriche ai morsetti, si deduce come esista la possibilità che due quadripoli, internamente diversi fra di loro, si comportino allo stesso modo riguardo alle interazioni con il mondo esterno. Quando questo si verifica, i due quadripoli sono detti *equivalenti,* rispondono con lo stesso segnale di uscita a identici segnali d'ingresso e possono essere arbitrariamente scambiati fra di loro in base alle esigenze di semplificazione dell'analisi complessiva della rete.
È possibile classificare i quadripoli in base al fatto che si possa ottenere in uscita una *potenza* maggiore di quella associata al segnale di ingresso. Nel caso che il quadripolo attenui la potenza di ingresso, esso è detto ***passivo***, viceversa è denominato ***attivo***. Evidentemente un quadripolo composto solamente da resistori, condensatori ed induttori è sicuramente passivo (e tale resta in presenza di trasformatori, in grado di innalzare il livello di tensione o di corrente ma non quello della potenza).

Modello a parametri «z»

Scegliendo come variabili indipendenti le due correnti di ingresso e di uscita, il sistema che rappresenta il quadripolo può essere scritto nel seguente modo:

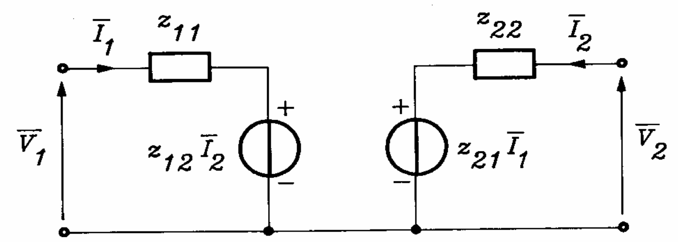
(1.1)
$$\begin{cases} V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2 \\ V_2 = z_{21} I_1 + z_{22} I_2 \end{cases}$$

La descrizione che ne deriva è denominata *modello a parametri z* o *parametri impedenza,* dal momento che i coefficienti delle correnti rappresentano appunto altrettante impedenze.
La determinazione dei coefficienti è agevole, anche da un punto di vista sperimentale, dato che è sufficiente

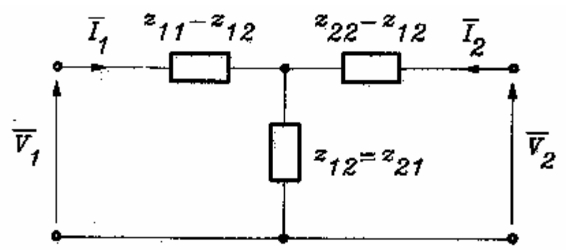
ipotizzare di annullare la corrente I_2 (aprendo il relativo generatore) per determinare z_{11} e z_{21}, e di effettuare la stessa operazione sul generatore I_1 per ricavare gli altri due parametri. In formule si ha:

$$z_{11} = \left.\frac{\overline{V}_1}{\overline{I}_1}\right|_{I_2=0} \qquad z_{12} = \left.\frac{\overline{V}_1}{\overline{I}_2}\right|_{I_1=0} \qquad z_{21} = \left.\frac{\overline{V}_2}{\overline{I}_1}\right|_{I_2=0} \qquad z_{22} = \left.\frac{\overline{V}_2}{\overline{I}_2}\right|_{I_1=0}$$

É da notare come il sistema (1.1) sia ottenibile anche mediante il teorema di sovrapposizione degli effetti, immaginando di far agire separatamente i due generatori I_1 e I_2, disattivando l' uno o l' altro a seconda del caso (si ricorda che per disattivare un generatore di corrente è necessario *aprirne* i morsetti).
I parametri z_{11}, z_{22}, rappresentano rispettivamente l' impedenza d' ingresso del quadripolo con i terminali di uscita aperti e l' impedenza di uscita con i terminali d' ingresso aperti. Il parametro z_{12} è denominato invece impedenza di trasferimento inversa *(transimpedenza inversa)* mentre z_{21} prende il nome di impedenza di trasferimento diretta *(transimpedenza diretta).*
Il sistema di equazioni (1.1) è immediatamente riconducibile ad un circuito equivalente contenente due generatori dipendenti di tensione, come rappresentato nella figura seguente.



Nel caso dei quadripoli passivi, si può dimostrare il cosiddetto *teorema di reciprocità;* esso afferma che il rapporto fra la tensione a vuoto ad una coppia di morsetti e la corrente del generatore che pilota l'altra coppia non cambia se vengono scambiati fra di loro il generatore e il punto di misura (il teorema vale anche nel caso che il quadripolo venga pilotato mediante un generatore di tensione e che venga misurata la corrente di cortocircuito). Applicando il teorema di reciprocità al modello a parametri z si ha che $z_{12} = z_{21}$.
Mediante semplici manipolazioni algebriche, nel caso di reciprocità, è possibile rappresentare il circuito equivalente di un quadripolo passivo modellizzato con i parametri «z» nel seguente modo:



Questo schema viene denominato *modello a T* di un quadripolo, a causa della disposizione delle impedenze.
Il modello a parametri impedenza è particolarmente utile nella descrizione di quadripoli che presentano rami in serie al generatore e all' uscita, dato che l' impedenza del ramo di uscita non compare nella determinazione di z_{11} mentre quella in serie al generatore non influenza il calcolo di z_{22}, a causa del circuito aperto in ingresso e in uscita.

Modello a parametri «y»

Scegliendo come variabili indipendenti le due tensioni di ingresso e di uscita, si ottiene il sistema di equazioni riportato di seguito:

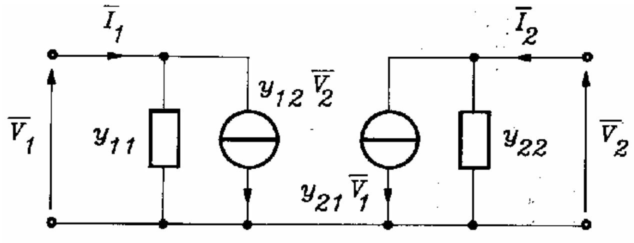
$$(1.2) \qquad \begin{cases} I_1 = y_{11} V_1 + y_{12} V_2 \\ I_2 = y_{21} V_1 + y_{22} V_2 \end{cases}$$

Questa descrizione matematica è denominata *modello o parametri y* altrimenti detti *parametri ammettenza,* visto che, moltiplicando delle tensione essi danno origine a delle correnti.
La determinazione dei parametri segue un procedimento duale rispetto caso precedente, dato che in questo caso è necessario annullare di volta in volta V_1 o V_2, sostituendo ai generatori dei cortocircuiti. Per questo motivo

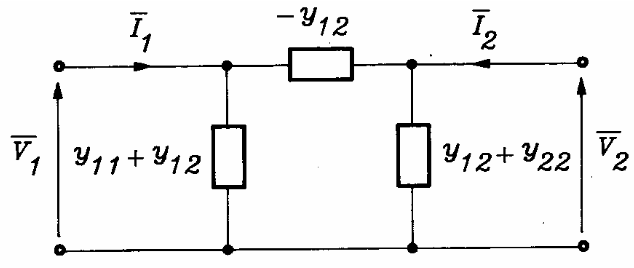
modello a parametri *y* fornisce risultati particolarmente semplici nei casi di quadripoli che presentano rami in parallelo al generatore nonché sull' uscita.
Il calcolo dei parametri può essere portato avanti mediante le seguenti formule:

$$y_{11} = \left.\frac{\overline{I}_1}{\overline{V}_1}\right|_{V_2=0} \qquad y_{12} = \left.\frac{\overline{I}_1}{\overline{V}_2}\right|_{V_1=0} \qquad y_{21} = \left.\frac{\overline{I}_2}{\overline{V}_1}\right|_{V_2=0} \qquad y_{22} = \left.\frac{\overline{I}_2}{\overline{V}_2}\right|_{V_1=0}$$

I primi due parametri esprimono rispettivamente l' ammettenza d'ingresso (con uscita in cortocircuito) e quella di uscita (con ingresso in cortocircuito), mentre gli altri due sono relativi alle ammettenze di trasferimento (inversa e diretta). Anche in questo caso è poi possibile pensare che il sistema (1.2) derivi dall' applicazione del principio di sovrapposizione.
L' interpretazione circuitale è immediata, e porta a disegnare il circuito equivalente seguente.



Anche in questo caso se il quadripolo è reciproco si ha che $y_{12} = y_{21}$ ed è possibile con semplici passaggi algebrici ricondurre lo schema ad uno equivalente, detto a π.



Modello a parametri di trasmissione

Il modello a parametri di trasmissione si ottiene scegliendo, come variabili indipendenti, entrambe le grandezze di ingresso o di uscita. Nel primo caso si ricavano i *parametri di trasmissione diretta*, nel secondo i *parametri di trasmissione inversa*.
Contrariamente ai casi precedenti, la corrente I_2 è considerata positiva quando è uscente dal quadripolo, nel caso dei parametri di trasmissione diretta, e la stessa cosa vale per I_1 nel caso di parametri di trasmissione inversa. Questo è dovuto al fatto che il modello in esame si utilizza principalmente per analizzare la connessione in cascata di più quadripoli, e quindi la corrente in uscita da uno di essi costituisce quella in ingresso del successivo.
Le equazioni del modello a parametri di trasmissione diretta sono le seguenti:

$$\text{(1.3)} \qquad \begin{cases} V_1 = A\,V_2 + B\,I_2 \\ I_1 = CV_2 + D\,I_2 \end{cases}$$

Da un punto di vista operativo i parametri possono essere ricavati mediante le seguenti relazioni:

$$A = \left.\frac{\overline{V}_1}{\overline{V}_2}\right|_{I_2=0} \qquad B = \left.\frac{\overline{V}_1}{\overline{I}_2}\right|_{V_2=0} \qquad C = \left.\frac{\overline{I}_1}{\overline{V}_2}\right|_{I_2=0} \qquad D = \left.\frac{\overline{I}_1}{\overline{I}_2}\right|_{V_2=0}$$

Se si risolva il sistema (1.3), si possono esprimere la tensione e la corrente di uscita in funzione di quelle di ingresso (cambiando il verso alle correnti I_2 e I_1) . Si ricavano le seguenti espressioni:

$$\overline{V}_2 = \frac{D\overline{V}_1 + B\overline{I}_1}{AD - BC} \qquad \overline{I}_2 = \frac{C\overline{V}_1 + A\overline{I}_1}{AD - BC}$$

Se il quadripolo è passivo vale il principio di reciprocità. Nel modello a parametri di trasmissioni questo implica che

$$AD - BC = 1$$

Si ricavano quindi facilmente le equazioni relative al modello di trasmissione inversa

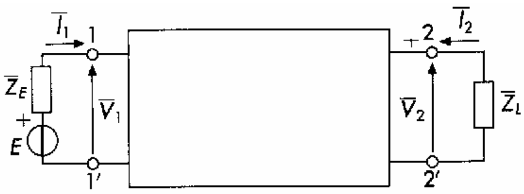
$$(1.4) \qquad \begin{cases} V_2 = D\,V_1 + B\,I_1 \\ I_2 = C V_1 + A\,I_1 \end{cases}$$

Quadripoli simmetrici

Si definisce simmetrico un quadripolo che presenta una specularità nei componenti del circuito, ossia quando scambiando i morsetti di ingresso con quelli di uscita (come se si riflettesse in uno specchio) la rete non cambia.
In questo caso è facile verificare che nel modello a parametri z si ottiene $z_{11} = z_{22}$, nel modello a parametri y si ha $y_{11} = y_{22}$, mentre nel modello a parametri di trasmissione si ha che $A = D$.
La condizione di simmetria comporta, come vedremo, una notevole semplificazione nello studio dei quadripoli in cascata. Per questo motivo i quadripoli simmetrici, pur essendo un caso particolare, rivestono una particolare importanza quando si cerca di costruire un modello di una linea di trasmissione su cavo, rifacendosi alla teoria dei quadripoli.

1.2 Impedenze dei quadripoli

La conoscenza del modello del quadripolo, e quindi dei parametri che caratterizzano la risposta di una rete elettrica di cui non si conosce la struttura circuitale, ha un'importanza fondamentale ove si vogliano definire con precisione i parametri di quella rete.
La rete elettrica risulterà alimentata da un generatore reale di tensione in ingresso, che fornisce la sollecitazione al sistema, e chiusa in uscita su un carico, impedenza sulla quale si stabilisce la differenza di potenziale di uscita.



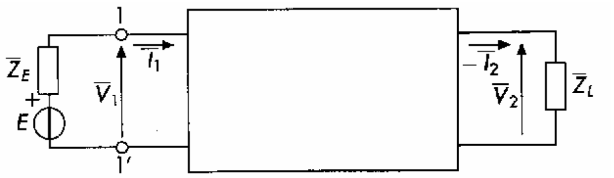
Ovvero, quando si colleghino più quadripoli in cascata, è importante conoscere i parametri che caratterizzano i dispositivi a monte e a valle di quello esaminato.

I parametri che quindi ci interessano, relativi al singolo quadripolo, sono i seguenti:
- impedenza d'ingresso;
- impedenza di uscita;
- impedenza iterativa;
- impedenza immagine;
- impedenza caratteristica.

Tali parametri necessitano di un approfondimento.

Impedenza d'ingresso e di uscita

Definiamo ***impedenza d'ingresso*** di una rete elettrica l'impedenza equivalente misurata ai morsetti d'ingresso (1-1') quando i morsetti di uscita (2-2') siano chiusi sull'impedenza di carico Z_L.



In base alla definizione possiamo scrivere che l' impedenza di ingresso vale

$$Z_i = \frac{V_1}{I_1}$$

Applicando questa definizione al modello a parametri di trasmissione diretta (sistema 1.3) ed eseguendo il rapporto tra le due equazioni otteniamo:

$$Z_i = \frac{V_1}{I_1} = \frac{A \cdot V_2 + B \cdot I_2}{C \cdot V_2 + D \cdot I_2}$$

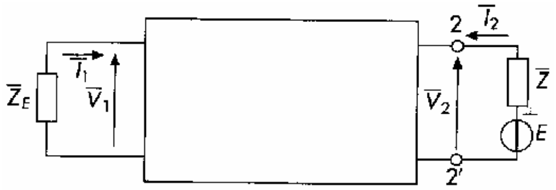
Ricavando sia a numeratore che a denominatore la corrente I_2 otteniamo:

$$Z_i = \frac{A \cdot \frac{V_2}{I_2} + B}{C \cdot \frac{V_2}{I_2} + D}$$

e quindi, ricordando che il rapporto tra la tensione e la corrente di uscita è proprio l'impedenza di carico Z_L:

(1.5) $$Z_i = \frac{A \cdot Z_L + B}{C \cdot Z_L + D}$$

Definiamo ***impedenza di uscita*** di una rete elettrica l' impedenza equivalente misurata ai morsetti di uscita (2-2') quando i morsetti d' ingresso (1-1') siano chiusi sull' impedenza del generatore Z_E.



In base alla definizione, l' impedenza di uscita è il rapporto esistente tra tensione e corrente di uscita.

$$Z_u = \frac{V_2}{I_2}$$

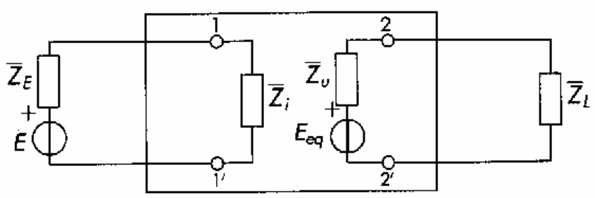
Applichiamo la definizione al caso in cui il modello è ricavato dai parametri di trasmissione inversa (sistema 1.4) ed eseguiamo il rapporto tra le due equazioni:

$$Z_u = \frac{V_2}{I_2} = \frac{D \cdot V_1 + B \cdot I_1}{C \cdot V_1 + A \cdot I_1}$$

Analogamente al caso precedente ricaviamo sia a numeratore che a denominatore I_1 e sostituiamo l'impedenza del generatore $Z_E = V_1 / I_1$ ottenendo:

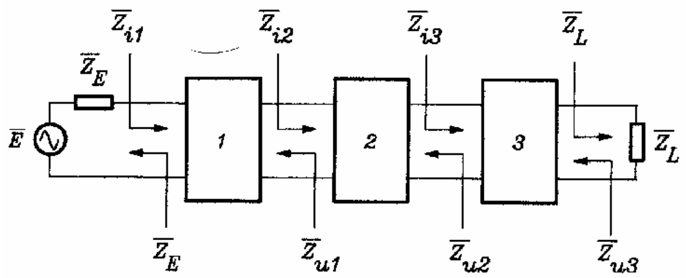
(1.6) $$Z_u = \frac{D \cdot Z_E + B}{C \cdot Z_E + A}$$

Lo schema di un quadripolo che tiene conto di Z_i e Z_u è rappresentabile come nella seguente figura:

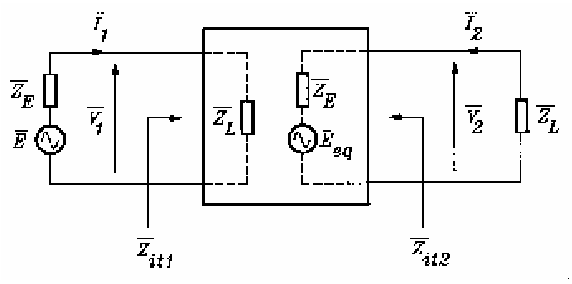


Impedenze iterative

Si è già detto che la principale difficoltà che si incontra nello studio di più quadripoli connessi in cascata, deriva dall' effetto di carico che ogni singolo quadripolo esercita su quello che lo pilota, impedendo di poter caratterizzare facilmente la rete complessiva in funzione dei parametri dei singoli blocchi costituenti.
Si rende quindi necessaria una nuova descrizione matematica dei quadripoli, che conduca ad un modello i cui parametri siano indipendenti dalle connessioni. Questo modello può essere ricavato in base a considerazioni sulle impedenze di ingresso ed uscita, e conduce alla definizione delle cosiddette *impedenze iterative.* Per comprendere il procedimento che porta a questa definizione, consideriamo la rete rappresentata nella figura seguente.



Partendo dalla fine della catena, supponiamo di scegliere un valore del carico tale che l' impedenza di ingresso vista ai morsetti dell' ultimo quadripolo sia uguale a Z_L. In queste condizioni, dal punto di vista dell' impedenza, è come se il carico fosse connesso direttamente all' uscita del secondo quadripolo. Se anche per quest' ultimo vale la stessa proprietà, il carico risulta connesso all' uscita del primo quadripolo. Iterando il ragionamento precedente, si può pensare che il generatore stesso sia chiuso direttamente su Z_L.
Lo stesso procedimento può essere ripetuto per quanto riguarda le impedenze di uscita; in questo caso occorre partire dal generatore e supporre che Z_E sia tale da generare come impedenza di uscita del primo quadripolo la Z_E stessa. Procedendo verso il carico, nell' ipotesi che ogni quadripolo si comporti allo stesso modo, si arriva in definitiva ad applicare al carico stesso un generatore E_{eq} dotato di un' impedenza interna pari a Z_E, come visibile nella seguente figura.



Le considerazioni precedenti portano quindi a definire ***l'impedenza iterativa*** come <u>l' impedenza che, quando è connessa ad una coppia di terminali di un quadripolo, causa un' impedenza uguale vista dall' altra coppia di terminali</u>.
Si ha quindi la condizione che l'impedenza di ingresso di ogni singolo quadripolo è uguale a Z_L e viene chiamata Z_{it1} mentre l'impedenza di uscita di ogni quadripolo è uguale a Z_E e viene chiamata Z_{it2}. Ovvero:

$$Z_{i1} = Z_{i2} = Z_{i3} = Z_L = Z_{it1}$$

$$Z_{u1} = Z_{u2} = Z_{u3} = Z_E = Z_{it2}$$

Nell' ipotesi che valgano le condizioni sopra riportate, la catena di quadripoli si dice *chiusa sulle impedenze iterative* e si comporta come un unico quadripolo avente impedenza d' ingresso coincidente con l' impedenza iterativa d' ingresso, e impedenza di uscita coincidente con l' impedenza iterativa d' uscita; ogni singolo quadripolo della cascata risulta quindi *adattato su base iterativa.*
Applicando la definizione data di impedenza iterativa Z_{it1} all'espressione dell'impedenza di ingresso (eq. 1.5) è possibile ricavare con semplici passaggi algebrici il seguente risultato:

$$Z_{it1} = \frac{A - D \pm \sqrt{(A-D)^2 + 4BC}}{2C}$$

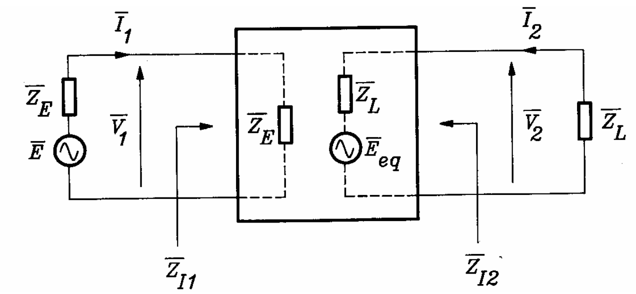
Analogamente, applicando la definizione di impedenza iterativa Z_{it2} all'espressione dell'impedenza di uscita (eq. 1.6) è possibile ricavare con semplici passaggi algebrici il seguente risultato:

$$Z_{it2} = \frac{D - A \pm \sqrt{(D-A)^2 + 4BC}}{2C}$$

Impedenze immagini

Dato un quadripolo alimentato da un generatore reale e chiuso su un certo carico, vengono definite ***impedenze immagini*** quei particolari valori di Z_E e Z_L per cui risulta verificata la condizione:

(1.7) $Z_E = Zi$ e $Z_L = Z_u$



Le impedenze immagini possono essere facilmente ricavate in funzione dei parametri di trasmissione. Infatti dalle equazioni (1.5) e (1.6), in cui vengono sostituite le condizioni (1.7), si ottiene

$$\begin{cases} Z_{I1} = \dfrac{AZ_{I2} + B}{CZ_{I2} + D} \\ Z_{I2} = \dfrac{DZ_{I1} + B}{CZ_{I1} + A} \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema in due variabili si ottiene:

(1.8)
$$\begin{cases} Z_{I1} = \sqrt{\dfrac{AB}{CD}} \\ Z_{I2} = \sqrt{\dfrac{BD}{AC}} \end{cases}$$

Un quadripolo chiuso in ingresso ed in uscita sulle sue impedenze immagini si dice *adattato su base immagine*.

Impedenza caratteristica

Per un quadripolo passivo simmetrico vale l'eguaglianza tra i parameri di trasmissione A e D. Se questo quadripolo è adattato su base immagine, le relazioni (1.8) si semplificano e forniscono:

$$Z_{I1} = Z_{I2} = \sqrt{\frac{B}{C}} \qquad (1.9)$$

Il valore comune delle impedenze immagini prende il nome di ***impedenza caratteristica*** del quadripolo e viene indicata con il simbolo Z_O. Un quadripolo chiuso in ingresso ed in uscita sulla sua impedenza caratteristica viene detto semplicemente *adattato*.

1.3 Attenuazione nei quadripoli

Un parametro molto significativo nello studio dei quadripoli è il rapporto tra la grandezza fisica di uscita e quella d' ingresso. Tale "grandezza fisica" può essere, nel caso in esame, una tensione, una corrente o una potenza (ossia il prodotto tra corrente e tensione). Comunque si tratta, nel caso più generale, di grandezze matematicamente complesse.
Il rapporto uscita/ingresso può essere maggiore o minore di 1. Nel primo caso si parla di **amplificazione**, e allora il quadripolo deve essere necessariamente **attivo**, ossia contenere dei generatori di tensione e/o corrente; conseguenza di ciò è la presenza di una sorgente di alimentazione interna (batteria) o esterna (linea di alimentazione). Il secondo caso è quello che stiamo qui prendendo in esame, in cui il quadripolo è **passivo**, quindi incapace di generare energia: l' uscita sarà allora, per forza di cose, minore dell' ingresso (uguale a esso solo in un caso ideale), e si parlerà di **attenuazione** del dispositivo.
Nella valutazione e nella misurazione sperimentale di attenuazioni si usano generalmente unità logaritmiche: ciò perché, qualora siano presenti *n* quadripoli in cascata, gli effetti di attenuazione si moltiplicano tra loro; se i quadripoli sono tutti uguali, l' attenuazione complessiva risulta quindi essere la potenza n-esima dell' attenuazione del singolo quadripolo.
L' uso di grandezze logaritmiche permette di passare dalle potenze ai loro esponenti, e dal calcolo di prodotti a quello di somme - cosa di scarsa rilevanza da quando sono stati introdotti calcolatrici e calcolatori portatili, ma assai utile per semplificare la vita dei tecnici quando tali strumenti di calcolo non erano ancora disponibili.
Il logaritmo di un numero può essere calcolato in una base qualsiasi, ma in pratica, le due basi più comunemente usate sono 10 ed *e* =2,71828... (numero di Nepero): a esse corrispondono dunque le due unità di misura correnti, il decibel (dB) e il neper (Np).
Il decibel è definito come logaritmo (in base 10) di un rapporto di potenze:

$$A_{(dB)} = 10\log\frac{P_1}{P_2}$$

Il neper, invece è definito come il logaritmo naturale di un rapporto di tensioni:

$$A_{(Np)} = \ln\frac{V_1}{V_2}$$

In realtà entrambi le unità sono utilizzate per esprimere rapporti di potenze, tensioni o correnti. Infatti essendo queste grandezze legate dalle relazioni $P = V\,I = V^2 / R = I^2 R$ (con R = resistenza ai cui capi si misurano V e I), si può scrivere:

$$A_{(dB)} = 10\log\frac{P_1}{P_2} = 10\log\frac{V_1^2/R_1}{V_2^2/R_2} = 10\log\frac{V_1^2}{V_2^2}\cdot\frac{R_2}{R_1} = 20\log\frac{V_1}{V_2} + 10\log\frac{R_2}{R_1}$$

Questa espressione, **quando R_1 e R_2 sono uguali**, si riduce a

$$A_{(dB)} = 20\log\frac{V_1}{V_2}$$

Allo stesso modo si può esprimere un rapporto di correnti:

$$A_{(dB)} = 10\log\frac{P_1}{P_2} = 10\log\frac{I_1^2 R_1}{I_2^2 R_2} = 10\log\frac{I_1^2}{I_2^2}\cdot\frac{R_1}{R_2} = 20\log\frac{V_1}{V_2} + 10\log\frac{R_1}{R_2}$$

Anche qui, **se R_1 e R_2 sono uguali,** si riduce a:

$$A_{(dB)} = 20\log\frac{I_1}{I_2}$$

Per quanto riguarda i neper, invece, il discorso è inverso: svolgendo analoghi calcoli si ottiene:

$$A_{(Np)} = \ln\frac{I_1}{I_2} \qquad \text{e} \qquad A_{(Np)} = \frac{1}{2}\ln\frac{P_1}{P_2}$$

Sempre nell'ipotesi che $R_1 = R_2$.
Volendo passare velocemente da decibel a neper o viceversa si possono applicare le seguenti equivalenze:

1 Np = 8,686 dB oppure 1 dB = 0,115 Np

Unità assolute e relative

Dal momento che matematicamente è possibile calcolare solo il logaritmo di un numero puro, le unità di misura logaritmiche, sia dB sia Np, sono unità **relative**: esprimono sempre, cioè, un **rapporto**. Dunque, quando si fornisce un valore in decibel o neper si dice quanto vale la grandezza in esame **rispetto a un'altra**: affinché questa misura sia utile in pratica, occorre sempre conoscere tale grandezza di riferimento.
Per questo motivo vengono introdotte delle unità impropriamente dette **assolute**: impropriamente perché si tratta pur sempre di unità logaritmiche, quindi fisicamente adimensionali; ma poiché il valore di riferimento è standard e universalmente noto, esse assumono in un certo senso un valore assoluto, cioè definito per chiunque.
In telefonia si usa quindi distinguere una misura assoluta in dBm, ossia riferita a una potenza standard di 1 mW (1 mW = 0 dBm), e una misura relativa in dBr, in cui la potenza di riferimento non è definita a priori (di solito è la potenza entrante nel circuito, ma può essere anche quella uscente o un qualsiasi altro valore). Quando la misurazione viene effettuata nell' origine del circuito (punto 0), essa viene a volte espressa in dBm0. Notiamo che, nonostante le diverse desinenze, sempre di decibel si tratta: se viene fornita una potenza pari a 2 dBm0 in ingresso a un attenuatore da 10 dB, l' uscita sarà pari a 2 - 10 = -8 dBm, ovvero avremo avuto una perdita di potenza di 10 dBr.
Quando la misura è fatta in tensione, si usa ugualmente esprimere l' unità di misura di riferimento; in telefonia normalmente ci si riferisce a una tensione di 1 µV, e dunque si useranno i dBµV.

Equivalente di trasmissione e livelli

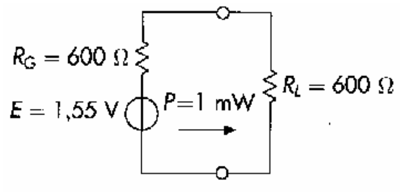
In generale, l' inserzione di un quadripolo tra un generatore e un carico fa variare la potenza trasmessa al carico rispetto al caso in cui generatore e carico siano connessi direttamente. Il rapporto tra la potenza nel secondo caso e quella nel primo, espresso in forma logaritmica, rappresenta la cosiddetta **attenuazione d'inserzione**.
Benché definita in termini di potenza, poiché si fa riferimento allo stesso carico, si può tranquillamente scrivere l' attenuazione d' inserzione attraverso la tensione:

$$A_{\text{ins(dB)}} = 10\log\frac{\frac{V_1^2}{R}}{\frac{V_2^2}{R}} = 20\log\frac{V_1}{V_2}$$

Dove V_1 è la tensione sul carico quando è connesso direttamente al generatore e V_2 è quella che si ha sul carico con l'inserzione del quadriplo.
Più generale risulta la definizione dell'**attenuazione composita**, riferita al caso in cui il carico collegato direttamente al generatore sia adattato *($R = R_G$),* mentre quello posto all' uscita del quadripolo si considera generico. In tal caso, in base a quanto detto nel paragrafo precedente:

$$A_{\text{(dB)}} = 10\log\frac{\frac{V_1^2}{R_G}}{\frac{V_2^2}{R}} = 20\log\frac{V_1}{V_2} + 10\log\frac{R}{R_G}$$

L'organismo internazionale che si occupa degli standard telefonici, il CCITT, ha definito un generatore equivalente (vedi figura seguente), ossia un generatore standard da usare come riferimento nelle prove su circuiti telefonici; questo generatore equivalente genera segnale sinusoidale alla frequenza di 800 Hz, ha un'impedenza propria puramente resistiva pari a $R_G = 600\ \Omega$ (impedenza tipica delle linee telefoniche) e deve trasmettere su un carico adattato una potenza di 1 mW.



Detto *E* il valore efficace di tensione del generatore, è evidente che la tensione sul carico (che, essendo adattato, è uguale a *RG)* vale E/2; la corrente sul carico varrà $(E/2)/R_G$, quindi, dovendo essere la potenza pari a 1 mW, si può ricavare la *E* imponendo:

$$\frac{E}{2}\cdot\frac{\frac{E}{2}}{R_G} = 1\ \text{mW} \quad \Rightarrow \quad \frac{\left(\frac{E}{2}\right)^2}{600\ \Omega} = 1\ \text{mW} \quad \Rightarrow \quad E = 1{,}55\ \text{V}$$

È facilissimo, sulla base di quanto detto, ricavare il valore della corrente che circola nel circuito: essa è la stessa che si ha sul carico, quindi I = (1,55 V/2)/600 Ω = 1,29 mA.
Quando l'attenuazione composita è calcolata usando come riferimento il generatore equivalente e il carico è un carico telefonico standard (600 Ω), si parla di **equivalente di trasmissione**. In altri termini, l'equivalente di trasmissione di un quadripolo è definito come il rapporto (logaritmico) tra la tensione sul carico standard collegato direttamente a un generatore equivalente (che, per definizione, è pari a E/2) e la tensione V sullo stesso carico in presenza del quadripolo. A seconda dei testi, l'equivalente di trasmissione viene indicato come *Eq* o semplicemente *q*:

$$E_{q(\mathrm{dB})} = 20\log\frac{\frac{E}{2}}{V} = 20\log\frac{0{,}775}{V}$$

Quando le misure sulla linea sono fatte prendendo come riferimento le grandezze caratteristiche del generatore equivalente, le corrispondenti attenuazioni vengono dette **livelli assoluti** (di potenza, di tensione o di corrente). In tal caso, l'unità di misura sarà il dBm (il riferimento è a 1 mW di potenza):
- livello assoluto di potenza: $l_p = 10 \log P / 1\text{mW}$ (dBm);
- livello assoluto di tensione: $l_v = 20 \log V / 775\text{mV}$ (dBm);
- livello assoluto di corrente: $l_i = 20 \log I / 1{,}29\ \text{mA}$ (dBm).

Se le grandezze di riferimento non sono quelle corrispondenti al generatore equivalente, ma piuttosto quelle relative al generatore effettivamente applicato alla linea, si parlerà di livelli relativi (sempre di potenza, tensione e corrente); l'unità di misura sarà allora il dBr:

- livello relativo di potenza: $l_{rp} = 10 \log P/P_0$ (dBr);
- livello relativo di tensione: $l_{rv} = 20 \log V/V_0$ (dBr);
- livello relativo di corrente: $l_{ri} = 20 \log I/I_0$ (dBr).

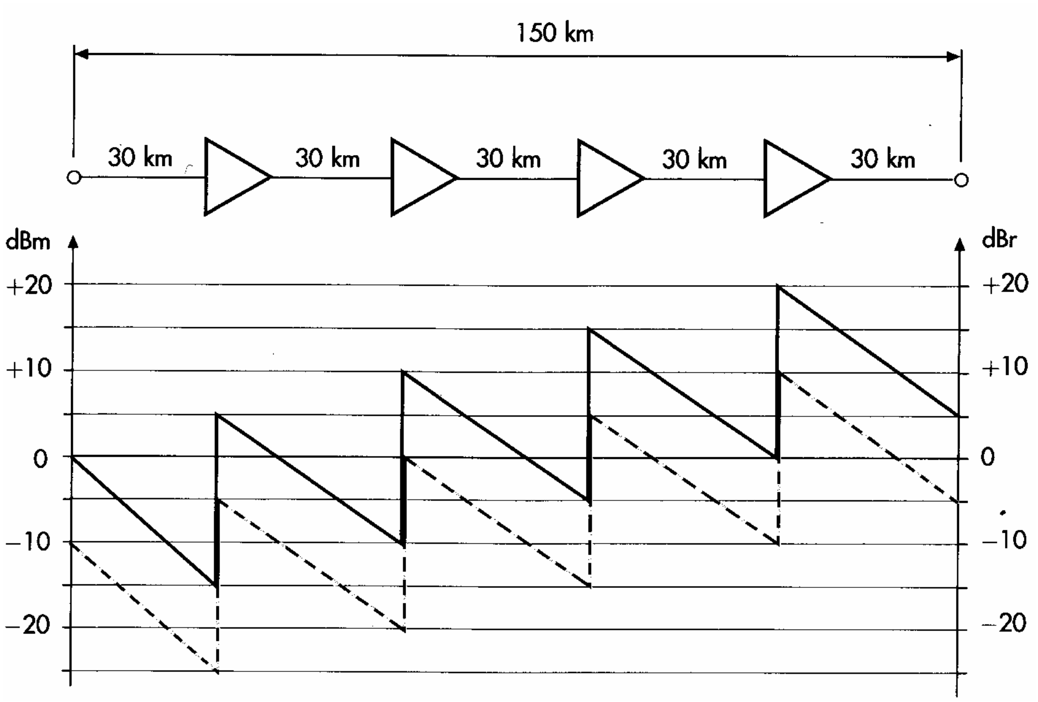
(Con il pedice 0 si sono indicate le grandezze nella sezione 0 della linea, ovvero nell'origine).

Il legame tra livello assoluto e livello relativo è molto semplice; infatti, limitandoci per semplicità ai soli livelli di potenza (ma il discorso è analogo negli altri due casi), vediamo come il livello assoluto l_p (x) in un punto x qualsiasi della linea sia pari al corrispondente livello relativo più il livello assoluto nell'origine l_p (0):

$$l_p(x) = l_{rp}(x) + l_p(0)$$

L'andamento della potenza, della tensione e della corrente lungo una linea di trasmissione può quindi essere descritto dando i valori del corrispondente livello (assoluto o relativo) in ogni punto della linea stessa; a tale scopo si usa disegnare degli ipsogrammi, ossia diagrammi logaritmici o semilogaritmici su cui si rappresenta l'andamento della grandezza in esame rispetto alla estensione geometrica della linea. Tipicamente, questo

andamento è discendente con pendenza pari all' attenuazione della linea (che infatti si esprime in dB/km); in presenza di amplificatori l' ipsogramma ha una discontinuità, ossia un brusco salto verso l' alto di un valore (sempre in dB) pari al guadagno dell' amplificatore.
L' ipsogramma del livello relativo parte sempre da 0 dB (per definizione, l_{rp} (0) = 10 log P_0/P_0 = 0 dB); quello del livello assoluto ha un andamento perfettamente identico, ma è traslato in alto o in basso di un valore pari al livello assoluto nel punto 0.



La figura rappresenta l'ipsogramma del livello relativo (tratto continuo) ed assoluto (tratteggiato) di una linea telefonica lunga in totale 150 Km suddivisa in cinque tronconi mediante l'inserzione di quattro amplificatori, dotati di un guadagno pari a 20 dB. L'attenuazione della linea è di 0.5 dB/Km ed il segna di ingresso è di 0,1 mW.
Le norme internazionali sul traffico telefonico fissano dei valori minimi del livello assoluto su linea, al di sotto dei quali il segnale diviene convenzionalmente inintelligibile, ossia si perde; dunque è necessario, in fase di progetto, conoscere l' attenuazione della linea e prevedere stazioni di amplificazione quando il livello di segnale rischia di scendere sotto il limite. La distanza tra due stazioni di amplificazione prende il nome di *passo di amplificazione*.

1.4 Adattamento di impedenza

L'adattamento d'impedenza consiste nell'inserzione in una linea di comunicazione, di speciali quadripoli, detti *adattatori*, che hanno il compito di massimizzare il trasferimento di potenza dal generatore al carico. Si sa dall'elettrotecnica che, in regime continuo, il massimo trasferimento di potenza tra generatore e carico avviene quando le resistenze del generatore e di carico sono uguali.
Questa condizione può essere generalizzata nel caso di regime sinusoidale nel seguente modo: chiamando E ed I i valori efficaci della tensione del generatore e di corrente nel circuito, $Z_E = R_E + jX_E$ e $Z_L = R_L + jX_L$ le due impedenze di generatore e di carico, avremo che:

$$I = \frac{E}{|Z_E + Z_L|} = \frac{E}{\sqrt{(R_E + R_L)^2 + (X_E + X_L)^2}}$$

e :

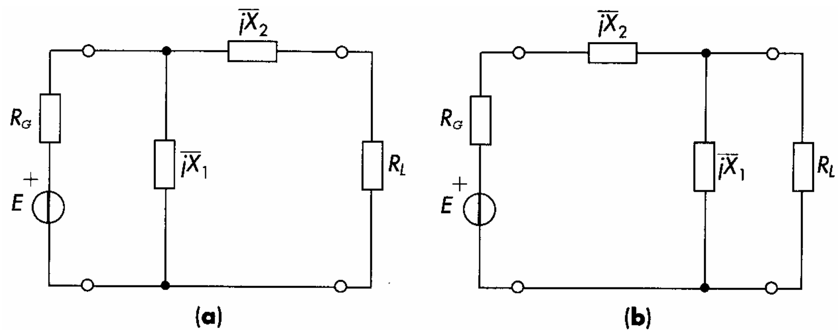
$$P = R_L I^2 = \frac{R_L E^2}{(R_E + R_L)^2 + (X_E + X_L)^2}$$

Per massimizzare la potenza attiva P occorre quindi rendere minimo il denominatore della frazione sopra riportata: ciò si ottiene prima di tutto facendo in modo che $X_E = - X_L$ (una di tipo capacitivo e l'altra di tipo induttivo), in modo da eliminare il secondo termine a denominatore. Dopodiché, studiando la potenza in funzione del carico R_L , si può dimostrare che essa ha un massimo proprio per $R_E = R_L$. il tal caso la potenza fornita al carico vale:

$$P = P_{\max} = \frac{V^2}{4R_L}$$

Reti reattive adattatrici d'impedenza

Per ottenere il massimo trasferimento di potenza sul carico in condizione di non adattamento, è opportuno inserire un quadripolo tra il carico e il generatore.
L' utilizzo delle reti reattive per l' adattamento d' impedenza è giustificato dal fatto che, ipotizzando i componenti ideali, esse non introducono attenuazione sulla potenza erogata dal generatore, la quale viene quindi trasferita integralmente al carico.
Indicando con Z_i l' impedenza d' ingresso dell' adattatore e Z_u quella di uscita, nell' ipotesi di un generatore con impedenza interna resistiva R_G si dovrà fare in modo che valga l' uguaglianza $R_G = Z_i$, in modo da permettere l' erogazione della massima potenza. D' altro canto, sul lato del carico, si dovrà imporre l' uguaglianza tra Z_u e Z_L, sempre al fine di permettere l' erogazione della massima potenza da parte del generatore equivalente di Thevenin. In altre parole, il quadripolo adattatore d' impedenza dovrà sempre essere realizzato rispettando l' adattamento su base immagine.
Le due tipologie circuitali più semplici sono riportate in figura.



Considerando il caso a) si possono ricavare le impedenze immagini con le seguenti formule:

$$\begin{cases} jX_1 \,||\, (jX_2 + R_L) = R_G \\ jX_1 \,||\, R_G + jX_2 = R_L \end{cases}$$

svolgendo i paralleli:

$$\begin{cases} \dfrac{-X_1X_2 + jX_1R_L}{R_L + j(X_1 + X_2)} = R_G \\ \dfrac{jX_1R_G}{R_G + jX_1} + jX_2 = R_L \end{cases}$$

e quindi:

$$\begin{cases} -X_1X_2 + jX_1R_L = R_GR_L + jR_G(X_1 + X_2) \\ jX_1R_G = \left(R_L - jX_2\right)\left(R_G + jX_1\right) \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} R_GR_L + X_1X_2 - j(X_1R_L - X_1R_G - X_2R_G) = 0 \\ R_GR_L + X_1X_2 + j(X_1R_L - X_1R_G - X_2R_G) = 0 \end{cases}$$

Si può notare che le due equazioni che compongono il sistema sono tra di loro complesse coniugate. Affinchè siano entrambe nulle è necessario che la parte reale sia nulla e la parte immaginaria sia pure nulla.

Si ottiene quindi:

$$\begin{cases} R_G R_L = -X_1 X_2 \\ (R_G - R_L) X_1 = -R_G X_2 \end{cases}$$

da cui si può notare che le due reattanze devono essere di segno opposto (quindi un condensatore ed una induttanza) dato che nella prima equazione il prodotto $R_G\, R_L$ è sicuramente positivo.
Si può quindi ricavare con semplici passaggi algebrici:

$$\begin{cases} X_1 = \pm R_G \sqrt{\dfrac{R_L}{R_G - R_L}} \\ X_2 = \mp \sqrt{R_L (R_G - R_L)} \end{cases}$$

Affinchè i valori delle reattanze siano reali è necessario sia verificata la condizione $R_G > R_L$ che impone quindi una limitazione al campo di applicazione del primo adattatore. Quando si ha invece che $R_L > R_G$ si può utilizzare l'adattatore b) della figura, ed applicando lo stesso procedimento di prima si ottiene:

$$\begin{cases} X_1 = \pm R_L \sqrt{\dfrac{R_G}{R_L - R_G}} \\ X_2 = \mp \sqrt{R_G (R_L - R_G)} \end{cases}$$

Si noti che nei calcoli svolti è implicito un valore di frequenza di lavoro (per l'esattezza di pulsazione: $X = \omega L$ per l'induttore e $X = 1/\omega C$ per il condensatore). Questo significa che l'adattamento risulta perfetto solo ad una determinata frequenza, ovvero che questo tipo di reti adattatrici funziona bene solo quando il circuito è destinato a lavorare in un intorno limitato di una certa frequenza.
Quando questa condizione non è rispettata si ricorre a quadripoli più complessi o a reti di tipo resistivo.

Infine un quadripolo molto utilizzato nell'adattamento di impedenza è il trasformatore. È noto dall'elettrotecnica che l'impedenza Z_i vista dal primario, quando al secondario è applicato R_L, è data dalla formula:

$$Z_i = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R_L$$

Ne consegue che per avere adattamento occorre imporre $Z_i = R_G$ da cui si ricava il rapporto di spire del trasformatore:

$$\frac{N_1}{N_2} = \sqrt{\frac{R_G}{R_L}}$$

Il trasformatore ideale sarebbe un adattatore perfetto, anche se è un dispositivo piuttosto ingombrante e, siccome va realizzato caso per caso, abbastanza costoso.