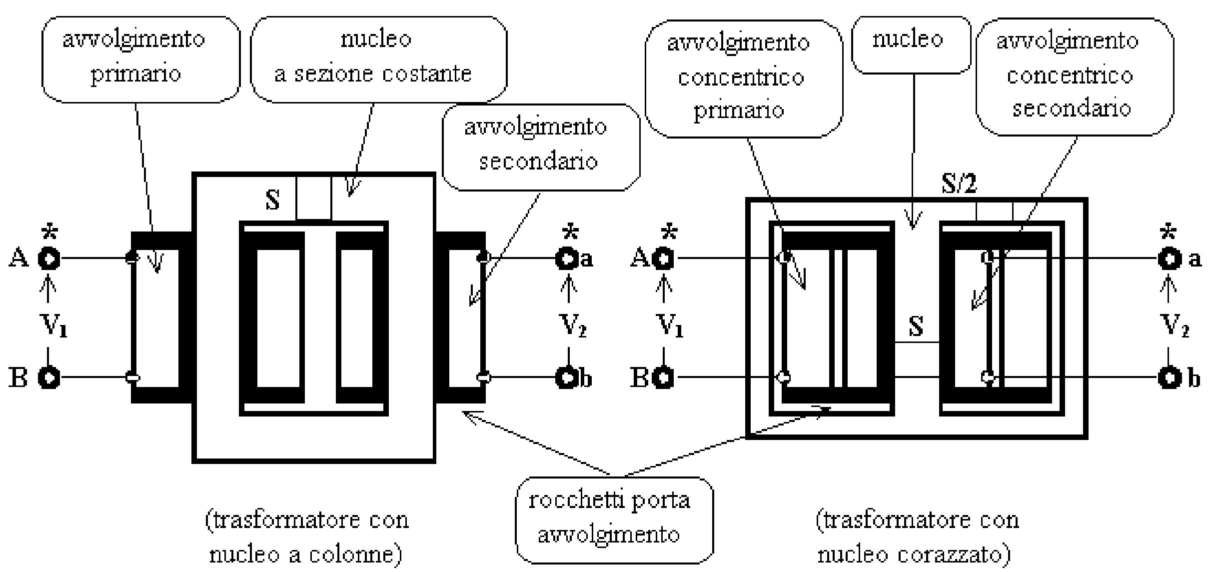
Generalità, principio di funzionamento

Col nome di trasformatori si definiscono delle macchine elettriche statiche (cioè senza organi in movimento) che permettono di trasferire potenza elettrica (attiva e reattiva) tra due sistemi elettrici (in corrente alternata) tra di loro non direttamente connessi e funzionanti a tensioni anche diverse. I trasformatori che assolvono principalmente a questa funzione sono detti trasformatori di potenza e possono essere monofasi o trifasi. Si hanno poi trasformatori speciali quali gli autotrasformatori (nei quali manca l'isolamento tra i sistemi elettrici connessi) ed i trasformatori a corrente costante (usati per alimentare gli impianti di illuminazione stradale con lampade in serie). Infine vi sono i trasformatori di misura, voltmetrici o amperometrici, che servono ad adattare i valori di tensione e corrente alternata da misurare alle portate degli strumenti impiegati. Tutti i trasformatori fino ad ora denominati sono caratterizzati dal funzionare alla frequenza industriale che, nel nostro paese ed in Europa vale **50** [Hz], ed è di questi che noi tratteremo. Esistono ulteriori applicazioni del trasformatore a frequenze diverse da quella industriale, ma noi non le prenderemo in considerazione essendo di interesse più elettronico che elettrotecnico.

Per quanto riguarda il principio di funzionamento, si può brevemente dire che la macchina (monofase) si compone di due avvolgimenti di materiale conduttore (rame o alluminio), l'avvolgimento primario e l'avvolgimento secondario tra di loro isolati, mutuamente accoppiati attraverso un circuito magnetico (chiamato nucleo e realizzato, come vedremo, sovrapponendo lamierini ferromagnetici). Allacciando l'avvolgimento primario in derivazione al sistema dal quale si intende prelevare potenza elettrica e collegando ai morsetti dell'avvolgimento secondario il sistema al quale si intende trasferire la potenza, nel caso in cui questo sistema abbia un'impedenza non infinita avviene il trasferimento di potenza. Maggiori dettagli sul principio di funzionamento saranno esposti nel paragrafo seguente.

Costruttivamente il trasformatore monofase può essere realizzato nei due seguenti modi:



Lo scopo di quanto seguirà è quello di studiare la macchina al fine di ricavarne un modello che, considerando la natura elettrica della macchina, sarà costituito da un circuito equivalente. Una volta noto il modello sarà possibile prevedere il comportamento della macchina in qualsiasi condizione di funzionamento attraverso delle simulazioni e, in definitiva, sarà possibile utilizzare la macchina nel miglior modo possibile.

Considerando la complessità della macchina, risulta conveniente iniziarne lo studio e ricavarne il modello per condizioni ideali e, successivamente, introdurre nel modello tutte quelle correzioni che permettono di tenere conto dei tanti aspetti reali non trascurabili. In ogni caso il modello che si ottiene è sempre il risultato di indispensabili ipotesi semplificative, oltre che della corretta valutazione delle numerose leggi che governano il funzionamento della macchina. Il processo di modellazione di un sistema, pur se con procedure diverse, è comune a tutti gli ambiti scientifico-tecnologici e, sempre, si cerca di arrivare ad un modello matematico essendo questo particolarmente idoneo alle elaborazioni, anche numeriche. Nel nostro caso, il modello matematico sarà costituito dalle equazioni elettrotecniche riferite al circuito equivalente.

Trasformatore monofase ideale

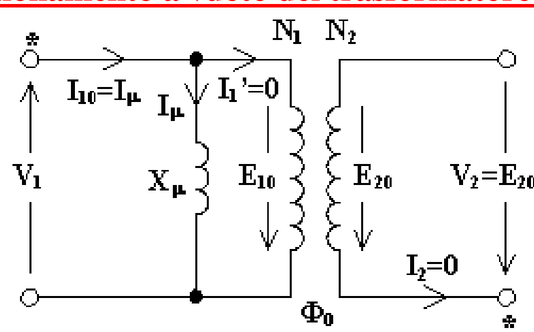
Si definisce ideale un trasformatore caratterizzato dalle seguenti proprietà:

a) resistività elettrica del materiale conduttore impiegato per gli avvolgimenti di valore nullo, così da potersi ritenere nulle le resistenze Ohmiche degli avvolgimenti;

b) permeabilità magnetica del mezzo circostante il nucleo di valore nullo, così da potersi ritenere tutto il flusso magnetico confinato nel nucleo stesso e concatenato con entrambi gli avvolgimenti. Permeabilità del nucleo finita e costante, così da poter ritenere lineare il mezzo ferromagnetico.

c) perdite nel materiale ferromagnetico del nucleo nulle.

Funzionamento a vuoto del trasformatore ideale



Alimentando alla tensione sinusoidale V_1 il primario del trasformatore composto di N_1 spire, in esso circolerà una corrente sinusoidale I_μ (chiamata corrente magnetizzante, in quadratura in ritardo rispetto alla tensione) che creerà una forza magnetomotrice sinusoidale $N_1 \cdot I_\mu$ e, quindi, un flusso sinusoidale Φ_0 (in fase con la corrente magnetizzante). Tale flusso, in base alle ipotesi fatte, si chiude tutto attraverso il circuito magnetico ed, essendo variabile sinusoidalmente, indurrà per via della legge generale dell'induzione elettromagnetica una forza elettromotrice sinusoidale in ciascuno dei due avvolgimenti. Tali f.e.m. sono entrambe in ritardo di **90°** rispetto al flusso e valgono in valore efficace rispettivamente:

$$E_{10} \cong 4{,}443 \cdot f \cdot \Phi_{0M} \cdot N_1 \ \ [V] \ , \quad E_{20} \cong 4{,}443 \cdot f \cdot \Phi_{0M} \cdot N_2 \ \ [V]$$

dove **f** è la frequenza della tensione d'alimentazione, Φ_{0M} [Wb] è il valore massimo del flusso. Essendo il trasformatore a vuoto, la corrente da esso erogata sarà nulla $I_2 = 0$ e l'impedenza di carico che si immagina applicata al secondario del trasformatore sarà infinita $Z_u = \infty$.

La dimostrazione dell'espressione della f.e.m. è la seguente. Per i valori istantanei, il flusso nel nucleo vale:

$$\Phi_0(t) = \Phi_{0M} \cdot sen(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) \;\; [Wb]$$

ed il flusso concatenato con l'avvolgimento primario vale:

$$\Phi_{0C1}(t) = N_1 \cdot \Phi_0(t) \;\; [Wb]$$

Dalla legge generale dell'induzione elettromagnetica, ricordando che:

$$\frac{d\,sen[f(t)]}{dt} = f'(t) \cdot cos[f(t)]$$

si ottiene per la f.e.m. indotta al primario:

$$e_{10}(t) = -\frac{d\Phi_{0C1}(t)}{dt} = -N_1 \cdot \Phi_{0M} \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$$

Chiamando:

$$E_{10M} = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \Phi_{0M} \cdot N_1 \;\; [V]$$

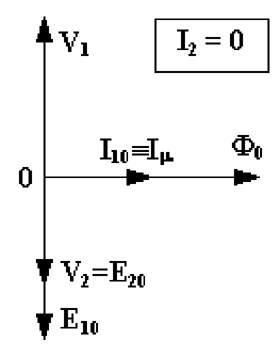
il valore massimo della f.e.m. indotta al primario e ricordando che **sen(-α) = -sen(α)** e che **cos(α) = sen(π/2 - α)** , l'espressione ai valori istantanei diventa:

$$e_{10}(t) = E_{10M} \cdot sen(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t - \pi/2) \;\; [V]$$

che conferma il ritardo di **90**° della f.e.m. rispetto al flusso, per quanto riguarda il valore efficace si ha:

$$E_{10} = \frac{E_{10M}}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot f \cdot \Phi_{0M} \cdot N_1}{\sqrt{2}} \cong 4{,}443 \cdot f \cdot \Phi_{0M} \cdot N_1 \;\; [V]$$

come volevasi dimostrare.



Passando dai valori efficaci ai valori vettoriali, così da tenere conto delle relazioni di fase tra le varie grandezze, e <u>considerando il flusso ad argomento iniziale nullo</u>, si avrà:

$$\overline{E_{10}} = -j \cdot E_{10} \quad , \quad \overline{E_{20}} = -j \cdot E_{20}$$

Inoltre, applicando la legge di Ohm alla maglia del primario si ha $\overline{V_1} + \overline{E_{10}} = 0$ ovvero $\overline{V_1} = -\overline{E_{10}}$ mentre al secondario si ha $\overline{V_2} = \overline{E_{20}}$. Il tutto è riportato sul piano di Gauss nel diagramma sopra disegnato e fa riferimento ad un trasformatore riduttore ($N_1 > N_2$).

Si osserva che la corrente assorbita dal trasformatore ideale a vuoto è composta unicamente dalla corrente magnetizzante ed è in ritardo di **90°** rispetto alla tensione applicata, quindi di essa si può tenere conto nel circuito equivalente con una reattanza fittizia induttiva X_μ [Ω] di adeguato valore. Tale reattanza andrà posta trasversalmente, ovvero sottoposta alla tensione applicata V_1 in quanto la corrente magnetizzante ha un valore massimo che vale:

$$I_{\mu M} = \frac{\Phi_{0M} \cdot \Re}{N_1} \quad [A]$$

(ricavato dalla legge di Hopkinson applicata al circuito magnetico, dove $\Re$ [H^{-1}] è la riluttanza di detto circuito) e, dipendendo dal flusso massimo, dipende dalla f.e.m. E_1 e quindi dalla tensione V_1. La reattanza trasversale fittizia potrà essere calcolata come:

$$X_\mu = \frac{E_{10}}{I_\mu} = \frac{V_1}{I_\mu} \quad [\Omega]$$

Si osserva che, fissata la tensione e la frequenza di alimentazione del trasformatore, il flusso è del tutto indipendente dalla configurazione e dalla riluttanza del nucleo essendo uguale a:

$$\Phi_{0M} \cong \frac{E_{10}}{4{,}443 \cdot f \cdot N_1} = \frac{V_1}{4{,}443 \cdot f \cdot N_1} \quad [Wb]$$

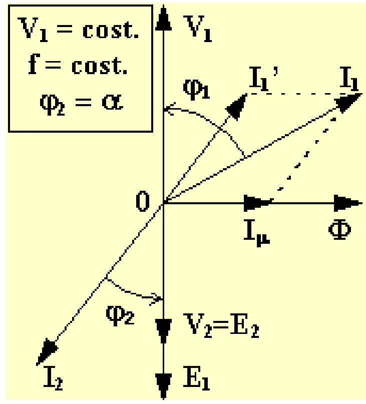
mentre tali parametri intervengono solo a determinare l'entità della corrente magnetizzante (e quindi della reattanza trasversale) necessaria a sostenere il flusso.

Si osserva che, mettendo a rapporto le f.e.m. si ha:

$$\frac{E_{10}}{E_{20}} = \frac{N_1}{N_2} = m$$

dove **m** è chiamato rapporto di spire. Questa relazione tra le f.e.m. vale sia per il trasformatore ideale che per quello reale, qualunque sia la condizione di funzionamento.

Funzionamento a carico del trasformatore ideale



Il trasformatore si dice a carico quando eroga corrente al secondario, ovvero quando, col primario alimentato, si collega una impedenza di valore finito ai morsetti d'uscita del secondario. Nel passaggio da vuoto a carico, se si mantengono costanti la tensione applicata e la frequenza, dovrà pure rimanere costante il flusso (basta guardare la sua espressione). Per questo motivo la forza magnetomotrice complessiva nel passaggio da vuoto a carico dovrà rimanere costante, in altri termini dovrà essere:

$$N_1 \cdot \overline{I_{10}} = N_1 \cdot \overline{I_1} + N_2 \cdot \overline{I_2}$$

dalla quale si ricava:

$$\overline{I_1} = \overline{I_{10}} - \overline{I_2} \cdot \frac{N_2}{N_1} \quad [A]$$

alla quantità:

$$\overline{I_1'} = -\overline{I_2} \cdot \frac{N_2}{N_1} \quad [A]$$

si da il nome di corrente di reazione primaria. La corrente assorbita a carico al primario del trasformatore si potrà quindi scrivere come:

$$\overline{I_1} = \overline{I_{10}} + \overline{I_1'} \quad [A]$$

tale espressione viene interpretata sul circuito equivalente tramite il primo principio di Kirchhoff applicato al nodo dal quale si dirama il ramo trasversale. Supponendo che il carico applicato al trasformatore ideale sia di natura Ohmico-induttiva, $\overline{Zu} = Zu\angle\alpha$ con $\alpha > 0°$, il diagramma vettoriale sul piano di Gauss si modifica come sopra raffigurato (ovviamente $\overline{I_2} = \overline{V_2} / \overline{Zu}$ [A]). Nel diagramma è stato tolto il pedice **0** a tutte le grandezze rappresentate, questo perché si fa riferimento al funzionamento a carico e non a vuoto. Il flusso, le f.e.m., le tensioni e la corrente magnetizzante hanno lo stesso valore a carico ed a vuoto (se si alimenta con tensione e frequenza costanti).

Si osserva che, mettendo a rapporto la corrente di reazione con la corrente erogata si ha:

$$\frac{I_1'}{I_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{m}$$

Questa relazione vale sia per il trasformatore ideale che per quello reale, qualunque sia la condizione di funzionamento.

Trasformatore monofase reale

Il trasformatore reale si differenzia da quello ideale nei seguenti aspetti:

a) resistenze Ohmiche $\mathbf{R_1}$, $\mathbf{R_2}$ degli avvolgimenti non nulle. A causa di ciò le correnti primaria e secondaria produrranno delle cadute di tensione Ohmiche e delle perdite di potenza per effetto Joule. Il valore delle resistenze Ohmiche aumenta con la temperatura, quindi per il circuito equivalente si dovrà fare riferimento ad una ben precisa temperatura chiamata temperatura convenzionale di riferimento **T** [°C] che vale **75** [°C] per le classi d'isolamento **A**, **E**, **B** oppure **115** [°C] per le classi **F**, **H**. Dal momento che gli effetti prodotti dalla presenza delle resistenze dipendono dalle correnti, nel circuito equivalente che costituisce il modello del trasformatore reale, le resistenze $\mathbf{R_1}$, $\mathbf{R_2}$ andranno poste in serie al circuito, in modo da essere percorse rispettivamente dalle correnti primaria e secondaria. Queste resistenze vengono proporzionate in modo tale che, a pieno carico, le perdite per effetto Joule al primario ed al secondario siano circa uguali, ciò equivale a fissare per i due avvolgimenti la stessa densità di corrente (nei trasformatori trifasi di media e grande potenza **2,5 ÷ 3,5** [A/mm^2] per il rame, **1,5 ÷ 2** [A/mm^2] per l'alluminio, nei piccoli trasformatori monofase **1,5 ÷ 2,4** [A/mm^2] decrescente all'aumentare della potenza per il rame).

b) presenza di flussi di dispersione al primario ed al secondario $\mathbf{\Phi d_1}$, $\mathbf{\Phi d_2}$, causati dal fatto che la permeabilità del mezzo circostante il nucleo non è nulla. Si tratta di flussi alternati sinusoidali di frequenza pari a quella della tensione d'alimentazione, indipendenti dalla temperatura, sostenuti rispettivamente dalla corrente primaria e secondaria, concatenati con un solo avvolgimento e che si sviluppano prevalentemente in aria. Si ha così un flusso autoconcatenato in ciascun avvolgimento che determinerà un'autoinduzione di f.e.m. e, in definitiva, una caduta di tensione reattiva induttiva ed un impegno di potenza reattiva in ciascun avvolgimento. Di tali aspetti si terrà conto mediante due reattanze di dispersione:

$$Ld_1 = \frac{N_1 \cdot \Phi d_1}{I_1} \ [\mathrm{H}] \ \Rightarrow \ Xd_1 = \omega \cdot Ld_1 \ [\Omega]$$
$$Ld_2 = \frac{N_2 \cdot \Phi d_2}{I_2} \ [\mathrm{H}] \ \Rightarrow \ Xd_2 = \omega \cdot Ld_2 \ [\Omega]$$

Tali reattanze, se la frequenza è costante, si potranno ritenere costanti perché il flusso di dispersione che le origina, sviluppandosi in gran parte in aria, percorre un circuito magnetico che è lecito ritenere a permeabilità magnetica costante. Inoltre andranno poste in serie nel circuito equivalente, in modo da essere percorse dalle correnti primaria e secondaria, infatti gli effetti da esse prodotti dipendono da tali correnti.

c) perdite nel ferro del nucleo dovute all'isteresi magnetica ed alle correnti parassite. L'entità di tali perdite, riferite ad **1** [Kg] di ferro, ammonta rispettivamente a:

$\mathbf{Pis = Kis \cdot f \cdot B_M^{\alpha}}$ [W/Kg] , $\mathbf{\alpha = 1{,}6}$ se $\mathbf{B_M < 1}$ [Wb / m^2], $\mathbf{\alpha = 2}$ se $\mathbf{B_M \geq 1}$ [Wb / m^2]

$\mathbf{Pcp = Kcp \cdot (Kf \cdot f \cdot B_M)^2}$ [W/Kg] , dove **Kf** è il fattore di forma del flusso alternato.

In tali espressioni $\mathbf{B_M}$ è il valore massimo dell'induzione alternata, **Kis** e **Kcp** sono due costanti dipendenti dal tipo di mezzo ferromagnetico.

Entrambe le perdite si possono riassumere nell'espressione:

$$\mathrm{Pfe} = \mathrm{Cp} \cdot \mathrm{B_M}^2 \cdot \left(\frac{f}{50}\right)^{1,2} \quad [\mathrm{W/Kg}]$$

Si tratta di una espressione empirica, dove **Cp** è la cifra specifica di perdita che rappresenta le perdite in **1** [Kg] di ferro quando la frequenza vale **50** [Hz] e l'induzione massima vale **1** [Wb/m^2].

Le espressioni sopra scritte evidenziano come le perdite varino con la frequenza ad induzione costante e con l'induzione a frequenza costante.

Se invece si immagina di mantenere costante la tensione applicata $\mathbf{V_1}$ (caso pratico più frequente, specialmente per il trasformatore), allora si dimostra che le perdite per correnti parassite sono indipendenti dalla frequenza, mentre le perdite per isteresi diminuiscono all'aumentare della frequenza secondo l'esponente $\mathbf{(1 - \alpha) < 0}$.

Infatti:

$$B_M = \frac{\Phi_M}{S} \cong \frac{V_1}{4{,}443 \cdot f \cdot N_1 \cdot S}$$

avendo trascurato la caduta sull'avvolgimento primario e quindi considerato $E_1 \cong V_1$. Ponendo $\mathbf{Y = 4{,}443 \cdot N_1 \cdot S}$ e sostituendo nelle espressioni delle perdite si ha:

$$\mathrm{Pis} = \mathrm{Kis} \cdot f \cdot \left(\frac{V_1}{Y \cdot f}\right)^{\alpha} = K_1 \cdot V_1^{\alpha} \cdot f^{(1-\alpha)}$$

dalla quale si evince che a tensione costante le perdite per isteresi diminuiscono all'aumentare della frequenza;

$$\mathrm{Pcp} = \mathrm{Kcp} \cdot \mathrm{Kf}^2 \cdot f^2 \cdot \left(\frac{V_1}{Y \cdot f}\right)^2 = K_2 \cdot V_1^2$$

dalla quale si evince che a tensione costante le perdite per correnti parassite non dipendono dalla frequenza.

Dalle stesse relazioni si nota come, per frequenza costante, le perdite per correnti parassite e per isteresi aumentano proporzionalmente al quadrato della tensione (potendosi ritenere di solito α uguale a **2**). Quindi è da evitare l'impiego del trasformatore a tensioni superiori ed a frequenze inferiori alle nominali.

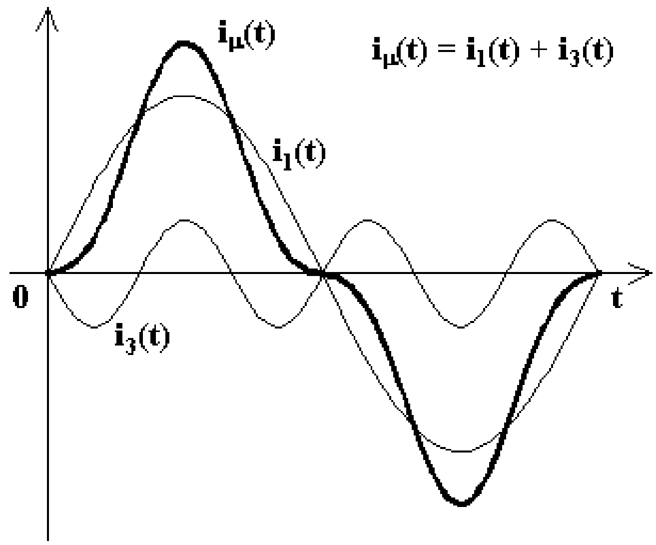
Delle perdite complessive nel ferro si terrà conto nel circuito equivalente con una resistenza fittizia trasversale $\mathbf{R_0}$ in parallelo alla $\mathbf{X_\mu}$, perché le perdite nel ferro sono pressoché proporzionali al quadrato della $\mathbf{B_M}$ e, perciò, della $\mathbf{E_1}$. Tale resistenza varrà:

$$\mathbf{R_0} = \frac{\mathbf{E_1}^2}{\mathbf{Pfe}} \; [\Omega]$$

Si chiama attiva la componente **Ia** di corrente assorbita che tiene conto delle perdite nel ferro. La $\mathbf{I_\mu}$ e la **Ia** sono sempre presenti nel funzionamento del trasformatore. Nel funzionamento a vuoto esse sono le sole correnti e dalla loro composizione si ha la corrente assorbita a vuoto $\overline{\mathbf{I_{10}}} = \overline{\mathbf{Ia}} + \overline{\mathbf{I_\mu}}$.
Ovviamente la corrente attiva è in quadratura in anticipo rispetto alla corrente magnetizzante e vale $\mathbf{Ia} = \mathbf{E_1} / \mathbf{R_0} \; [\mathrm{A}]$.

d) perdite addizionali dovute alla maggior resistenza presentata dagli avvolgimenti in corrente alternata rispetto alla corrente continua. Le perdite addizionali diminuiscono all'aumentare della temperatura e sono originate dall'effetto pelle, dall'effetto di prossimità e dalle correnti parassite che i flussi dispersi fanno scaturire nei mezzi conduttori da essi intersecati. Di tali perdite si tiene conto, conglobandole assieme a quelle Ohmiche, mediante la resistenza equivalente ridotta al primario od al secondario, riferita alla temperatura convenzionale.

e) non linearità del mezzo ferromagnetico, che determina l'impossibilità di avere contemporaneamente sinusoidali la corrente magnetizzante ed il flusso. Infatti la permeabilità di un materiale ferromagnetico non è costante, ma dipende dal valore del campo magnetico. Quindi la caratteristica di magnetizzazione $\mathbf{B} = f(\mathbf{H})$ non è rettilinea così che a variazioni costanti di campo corrispondono variazioni diverse d'induzione e la stessa cosa succede nella relazione tra flusso (proporzionale all'induzione) e corrente magnetizzante (proporzionale al campo). Considerando che il trasformatore viene alimentato da una tensione forzatamente sinusoidale e che la f.e.m. è pressoché uguale alla tensione si può senz'altro ritenere sinusoidale il flusso (direttamente proporzionale alla f.e.m.) e, quindi, deformata la corrente magnetizzante. La deformazione è tanto più accentuata quanto più il punto di lavoro sulla caratteristica di magnetizzazione si addentra nelle zone del ginocchio e della saturazione. Nella pratica si lavora con valori d'induzione massima nel nucleo (**1,3 ÷ 1,75** [Wb/m^2] a secondo del tipo di lamierino per i trasformatori trifasi di media e grande potenza, **0,8 ÷ 1,4** [Wb/m^2] per i piccoli trasformatori monofase) tali da raggiungere a malapena la zona del ginocchio così che la deformazione della corrente magnetizzante è poco marcata. In tali condizioni è lecito ritenere la corrente magnetizzante uguale alla somma delle sue componenti di prima (detta fondamentale) e terza armonica come mostrato in figura.

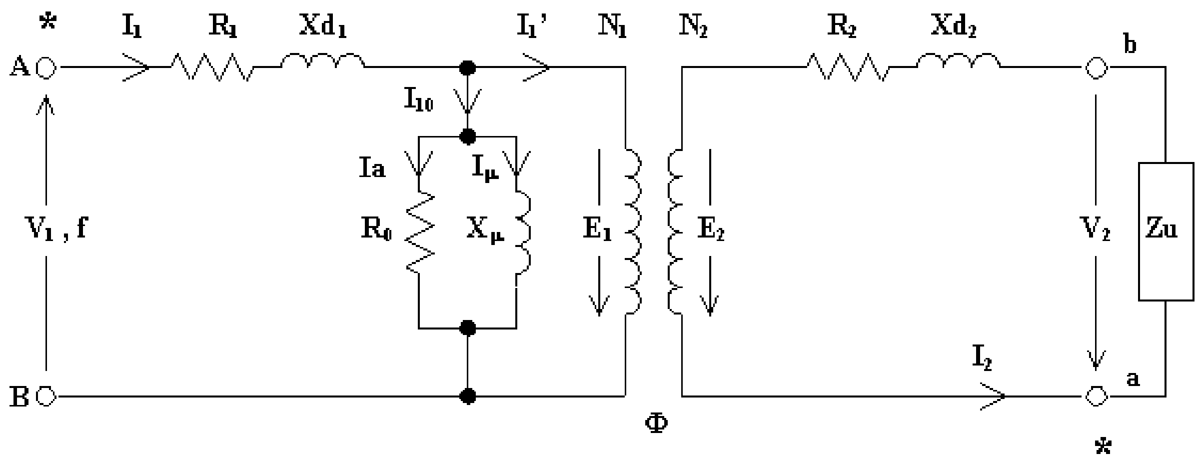


La componente di terza armonica, di frequenza **150** [Hz], può, nel caso non sia sufficientemente piccola, provocare disturbi nelle linee telefoniche poste in prossimità alla linea che alimenta il trasformatore essendo la sua frequenza nel campo dell'udibile.

f) <u>sovracorrente d'inserzione</u>, si presenta nell'istante di messa in tensione del TR a vuoto quando la tensione ad esso applicata ha argomento iniziale nullo, cioè è esprimibile nella forma $\mathbf{v_1(t) = V_{1M} \cdot sen(\omega \cdot t)}$. In tale caso il flusso nel nucleo assume inizialmente un valore massimo doppio rispetto a quello normale e, mandando in saturazione il ferro, determina il richiamo di una intensissima corrente magnetizzante, anche **40** volte quella normale. Poichè la corrente magnetizzante può anche essere il **5%** della nominale a carico, si osserva che all'inserzione (durante la prima semionda) la corrente può diventare anche il doppio della nominale a pieno carico e di ciò si dovrà tenere conto nella scelta dei dispositivi di protezione contro i cortocircuiti dei trasformatori. La condizione migliore di inserzione è quella per la quale $\mathbf{v_1(t) = V_{1M} \cdot sen(\omega \cdot t + \pi/2)}$, infatti in tal caso il flusso assume fin dalla prima semionda il valore normale che poi conserverà.

Circuito equivalente del trasformatore monofase reale

Partendo dal circuito equivalente del trasformatore ideale e tenendo conto degli aspetti che caratterizzano il trasformatore reale si ottiene, per quest'ultimo, il seguente circuito:



Il significato dei vari parametri che compaiono nel circuito equivalente è stato chiarito nei paragrafi precedenti. Il circuito equivalente è da intendersi a parametri costanti, cioè invarianti nel tempo. Perché ciò sia vero deve essere costante sia la frequenza della tensione di alimentazione che la temperatura di funzionamento. Per quanto riguarda la temperatura, essa deve essere quella convenzionale di riferimento.

Le equazioni interne alla macchina (costituenti il suo modello matematico), sono:

$$E_1 \cong 4{,}443 \cdot f \cdot \Phi_M \cdot N_1 \ [V], \quad E_2 \cong 4{,}443 \cdot f \cdot \Phi_M \cdot N_2 \ [V], \quad \frac{E_{10}}{E_{20}} = \frac{N_1}{N_2} = m$$

$$\frac{I_1'}{I_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{m}, \quad \overline{I_1'} = -\overline{I_2} \cdot \frac{N_2}{N_1} \ [A], \quad I_\mu = \frac{E_1}{X_\mu} \ [A], \quad Ia = \frac{E_1}{R_0} \ [A], \quad \overline{I_{10}} = \overline{Ia} + \overline{I_\mu} \ [A]$$

$$\overline{I_1} = \overline{I_{10}} + \overline{I_1'} \ [A], \quad \overline{V_1} = -\overline{E_1} + \overline{I_1} \cdot (R_1 + j \cdot Xd_1) \ [V], \quad \overline{V_2} = \overline{E_2} - \overline{I_2} \cdot (R_2 + j \cdot Xd_2) \ [V]$$

Le equazioni esterne, che vincolano la macchina ad un specifico funzionamento, sono:

$$\overline{V_1} = \text{cost.}, \quad \overline{V_2} = \overline{I_2} \cdot \overline{Zu} \ [V]$$

E' importante osservare come nel trasformatore reale, pur mantenendo costanti la tensione e la frequenza di alimentazione, il flusso utile **Φ** non possa ritenersi costante. Infatti al variare del carico (cioè al variare della corrente erogata $\mathbf{I_2}$ in conseguenza di variazioni dell'impedenza $\overline{\mathbf{Zu}}$ del carico) varierà la corrente di reazione primaria $\mathbf{I_1'}$ e, quindi, la corrente $\mathbf{I_1}$ al primario del trasformatore. Questo fatto determina una variazione della c.d.t. sull'impedenza longitudinale dell'avvolgimento primario e, in definitiva, una variazione della f.e.m. primaria dalla quale dipende direttamente il flusso. E' facile immaginare le complicazioni nell'uso del modello che tale fatto implica.

Oltre al rapporto di spire sono pure significativi il rapporto reale di trasformazione a carico:

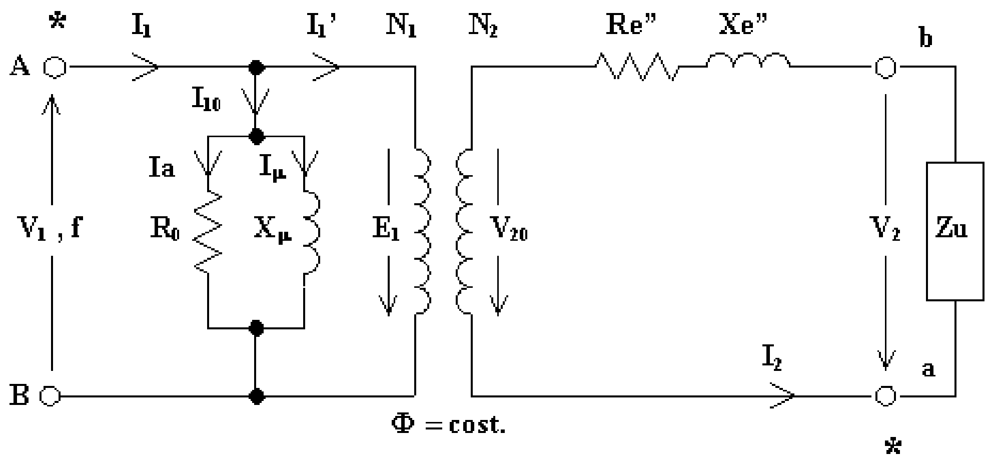
$$K = \frac{V_1}{V_2}$$

ed il rapporto di trasformazione nominale, definito come il rapporto tra la tensione primaria nominale $\mathbf{V_1n}$ e la corrispondente tensione al secondario a vuoto $\mathbf{V_{20}n}$:

$$Ko = \frac{V_1 n}{V_{20} n}$$

Si può facilmente verificare che, nel caso di carico Ohmico-induttivo, risulta essere **Ko < K** mentre è sempre lecito considerare $Ko \cong m$.

Circuito equivalente semplificato ridotto al secondario



E' il più utilizzato dei circuiti equivalenti. Se si trascurano le c.d.t. provocate dalla $\overline{I_{10}}$ sulla impedenza $\overline{Z_1} = R_1 + j \cdot Xd_1$ (la qual cosa è lecita essendo in condizioni di funzionamento nominali la corrente a vuoto pochi percento della corrente assorbita al primario), allora si può immaginare che i rami trasversali siano sottoposti alla $\overline{V_1}$ anziché $\overline{E_1}$ e quindi è possibile trasportarli a monte di tutto il circuito. Ciò equivale a ritenere il flusso nel trasformatore costante al variare del carico (purché siano costanti la tensione e la frequenza di alimentazione). In tale ipotesi si può ritenere che l'impedenza $\overline{Z_1}$ sia percorsa dalla $\overline{I_1'}$ anziché dalla $\overline{I_1}$ e si può scrivere:

$$\overline{V_1} = -\overline{E_1} + \overline{I_1'} \cdot (R_1 + j \cdot Xd_1)$$

Ricordando le relazioni che legano le f.e.m. e le correnti attraverso il rapporto di spire e moltiplicando ambo i membri per $N_2 / N_1 = 1/m$ si ottiene:

$$\frac{\overline{V_1}}{m} = -\overline{E_2} - \overline{I_2} \cdot \left(\frac{R_1}{m^2} + j \cdot \frac{Xd_1}{m^2}\right)$$

Risolvendo rispetto alla f.e.m. secondaria si ha:

$$\overline{E_2} = -\frac{\overline{V_1}}{m} - \overline{I_2} \cdot \frac{R_1}{m^2} - \overline{I_2} \cdot j \cdot \frac{Xd_1}{m^2}$$

Si osserva che essendo $m \cong K_0$, sarà:

$$-\frac{\overline{V_1}}{m} \cong \overline{V_{20}}$$

Applicando la legge di Ohm al secondario e sostituendo si ottiene:

$$\overline{V_2} = \overline{V_{20}} - \overline{I_2} \cdot (R_2 + \frac{R_1}{m^2}) - \overline{I_2} \cdot j \cdot (Xd_2 + \frac{Xd_1}{m^2})$$

Vengono chiamate resistenza equivalente secondaria [Ω] :

$$Re'' = R_2 + \frac{R_1}{m^2}$$

e reattanza equivalente secondaria [Ω]:

$$Xe'' = Xd_2 + \frac{Xd_1}{m^2}$$

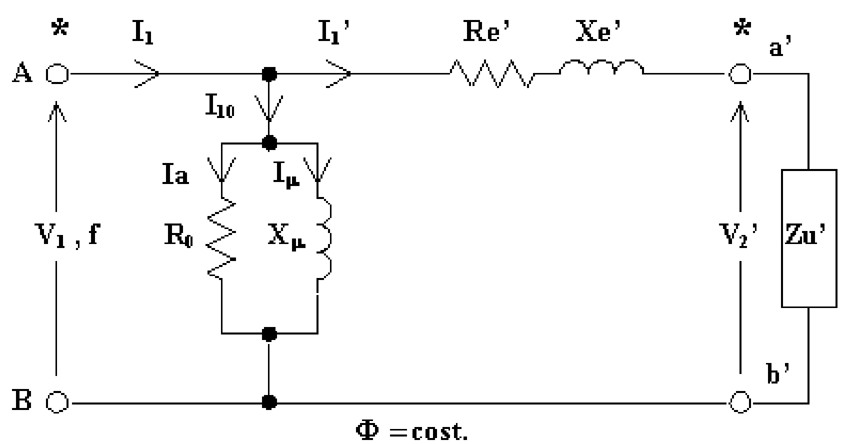
così che la legge di Ohm si può riscrivere come:

$$\overline{V_2} = \overline{V_{20}} - \overline{I_2} \cdot (Re'' + j \cdot Xe'')$$

correttamente trascritta nel circuito equivalente sopra disegnato.

Volendo si possono portare al secondario anche i parametri trasversali, è facile verificare che anch'essi devono essere divisi per il quadrato del rapporto di spire.

Circuito equivalente semplificato ridotto al primario



Applicando la legge di Ohm al secondario del circuito equivalente e ricordando le relazioni che legano le f.e.m. e le correnti al rapporto di spire si ha:

$$\overline{V_2} = \frac{\overline{E_1}}{m} + \overline{I_1'} \cdot (R_2 \cdot m + j \cdot Xd_2 \cdot m)$$

Moltiplicando per $\mathbf{N_1/N_2 = m}$ si ottiene:

$$\overline{V_2} \cdot \frac{N_1}{N_2} = \overline{E_1} + \overline{I_1'} \cdot (R_2 \cdot m^2 + j \cdot Xd_2 \cdot m^2)$$

dalla quale si ricava:

$$\overline{E_1} = \overline{V_2} \cdot m - \overline{I_1'} \cdot R_2 \cdot m^2 - \overline{I_1'} \cdot j \cdot Xd_2 \cdot m^2$$

Ovvero è possibile sostituire a tutto il circuito a valle della $\overline{E_1}$ il circuito corrispondente al secondo membro dell'equazione sopra scritta. Se inoltre si suppone in via semplificativa che la macchina lavori a flusso costante, ovvero se si trasporta il ramo trasversale a monte di tutto, allora si può considerare l'impedenza del primario percorsa dalla $\overline{I_1'}$ anziché dalla $\overline{I_1}$ e scrivere:

$$\begin{aligned}\overline{V_1} &= \overline{I_1'} \cdot (R_1 + R_2 \cdot m^2) + \overline{I_1'} \cdot j \cdot (Xd_1 + Xd_2 \cdot m^2) - \overline{V_2} \cdot m = \\ &= \overline{I_1'} \cdot Re' + \overline{I_1'} \cdot j \cdot Xe' + \overline{V_2'}\end{aligned}$$

che corrisponde al circuito sopra disegnato. Si osserva che $-\overline{V_2} \cdot m = \overline{V_2'}$ è la <u>tensione d'uscita riportata al primario</u> e $\overline{Zu'}$ è l'<u>impedenza di carico riportata al primario</u>, infatti:

$$\overline{Zu'} = \frac{\overline{V_2'}}{\overline{\overline{I_1'}}} = \frac{-\overline{V_2} \cdot m}{\frac{-\overline{\overline{I_2}}}{m}} = \frac{\overline{V_2}}{\overline{\overline{I_2}}} \cdot m^2$$

Quindi, per portare un parametro dal secondario al primario, si moltiplica per $\mathbf{m^2}$ (mentre per fare il passaggio inverso, come abbiamo visto, si divide per $\mathbf{m^2}$).

<u>Osservazione</u>: i circuiti equivalenti semplificati vengono praticamente impiegati al posto di quello non semplificato dal quale si è partiti. Infatti la semplificazione effettuata (quella di considerare la macchina funzionante a flusso costante) non introduce significative differenze nei risultati ottenibili mediante il modello, inoltre i parametri longitudinali equivalenti sono più significativi di quelli separati per i due avvolgimenti. Questo perché i parametri equivalenti si ottengono attraverso prove fatte sulla macchina attraverso le quali le resistenze equivalenti longitudinali tengono conto, oltre che delle perdite Ohmiche, anche delle perdite addizionali. Infine, per motivazioni teorico-tecniche, che noi non prendiamo in considerazione, si può anche dire che le reattanze di dispersione considerate singolarmente per i due avvolgimenti variano (leggermente) al variare del carico, mentre la reattanza equivalente (non importa se riportata al primario od al secondario) è più prossima all'essere indipendente dal carico.

<u>Dati di targa del trasformatore</u>

Il trasformatore, come tutte le macchine, è caratterizzato da una targa che riporta i valori nominali di funzionamento. Si tratta dei valori che servono a definire le prestazioni della macchina agli effetti delle garanzie e del collaudo. Non bisogna infatti dimenticare che l'efficienza della macchina dipende, oltre che dalle sue parti attive (ferro del nucleo, rame degli avvolgimenti), anche dal buon funzionamento degli isolanti impiegati. Gli isolanti sono condizionati dall'ambiente nel quale lavorano, dalle tensioni che devono sopportare e dalla temperatura che la macchina (in particolare gli avvolgimenti) raggiunge a regime termico. La temperatura a regime dipende dalle perdite di potenza interne alla macchina, perdite nel ferro che sono funzione del quadrato della tensione applicata e perdite nel rame che sono funzione del quadrato della corrente negli avvolgimenti. I valori nominali sono quei valori che le grandezze elettriche possono assumere garantendo il corretto funzionamento della macchina e, di solito, garantendo il più alto rendimento possibile.

Per il trasformatore, i più importanti dati di targa sono:

a) la frequenza nominale **fn** [Hz];

b) le tensioni nominali primaria $\mathbf{V_1n}$ [V] e secondaria $\mathbf{V_{20}n}$ [V] (concatenate per la macchina trifase), in valore efficace e riferite al funzionamento a vuoto;

c) il rapporto nominale di trasformazione

$$K_0 = \frac{V_1 n}{V_{20} n} \ ;$$

d) le correnti nominali primaria $\mathbf{I_1n}$ [A] e secondaria $\mathbf{I_2n}$ [A], in valore efficace e riferite ai terminali di collegamento del trasformatore alle linee;

e) la potenza nominale definita come $\mathbf{Sn = V_1n \cdot I_1n = V_{20}n \cdot I_2n}$ [VA] per il trasformatore monofase, $\mathbf{Sn = \sqrt{3} \cdot V_1n \cdot I_1n = \sqrt{3} \cdot V_{20}n \cdot I_2n}$ [VA] per il trasformatore trifase;

f) le perdite a vuoto espresse in percento della potenza nominale **Po%** , la corrente assorbita a vuoto in percento della corrente nominale **Io%** , il f.d.p. a vuoto $\mathbf{\cos\varphi_0}$ quando il trasformatore è alimentato a tensione e frequenza nominali (esiste la relazione $\mathbf{\cos\varphi_0 = Po\% / Io\%}$);

g) le perdite in cortocircuito espresse in percento della potenza nominale **Pcc%** , la tensione applicata in cortocircuito in percento della tensione nominale **Vcc%** , il f.d.p. in cortocircuito $\mathbf{\cos\varphi_{CC}}$ quando il trasformatore ha i morsetti d'uscita cortocircuitati, ha gli avvolgimenti percorsi dalle correnti nominali e la temperatura è quella convenzionale di riferimento (esiste la relazione $\cos\varphi_{CC} = Pcc\% / Vcc\%$);

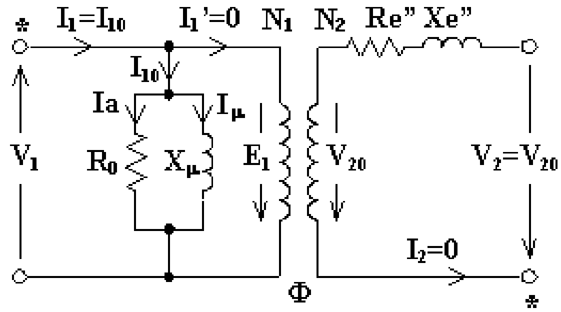
h) il gruppo (o la famiglia) d'appartenenza, solo per i trasformatori trifase;

i) la classe d'isolamento, che definisce la temperatura convenzionale di riferimento della quale abbiamo già parlato;

l) il tipo di servizio (continuo, di durata limitata, intermittente).

Per ultimo è bene ricordare che, indipendentemente dall'impiego che se ne farà (riduttore o elevatore di tensione), si definisce primario l'avvolgimento di alta tensione e i morsetti dei due lati (di alta e bassa tensione) si identificano mediante lettere maiuscole dal lato di alta tensione e minuscole dal lato di bassa tensione, usando la stessa lettera per i morsetti dei due lati che si corrispondono (ovvero che assumono contemporaneamente il potenziale positivo o negativo).

Funzionamento a vuoto del tr monofase reale



Il trasformatore si dice funzionante a vuoto se è nulla la corrente da esso erogata, ovvero se è **Zu =** ∞ [Ω] , $\mathbf{I_2 = 0}$ [A]. Sotto tale ipotesi è ovviamente nulla anche la corrente di reazione al primario e, con riferimento al circuito equivalente semplificato ridotto al secondario, si può scrivere: $\overline{I_1} = \overline{I_{10}}$, $\overline{V_2} = \overline{V_{20}}$. In tale condizione di lavoro è sicuramente nulla la potenza erogata dal trasformatore, mentre la potenza assorbita al primario coincide con le perdite nel ferro e vale:

$$Po = Pfe = V_1 \cdot I_{10} \cdot \cos\varphi_0 = \frac{V_1^{\,2}}{R_0} \quad [W]$$

Se la tensione e la frequenza di alimentazione sono quelle nominali, $\mathbf{V_1n}$, **fn**, risulta evidente come, misurando la corrente e la potenza assorbite nel funzionamento a vuoto, **Pon**, $\mathbf{I_{10}n}$ sia possibile calcolare i parametri trasversali del circuito equivalente semplificato:

$$R_0 = \frac{V_1n^2}{Pon} \; [\Omega] , \quad X_\mu = \frac{V_1n^2}{Qon} = \frac{V_1n^2}{Pon \cdot tg\varphi_0} = \frac{R_0}{tg\varphi_0} \; [\Omega]$$

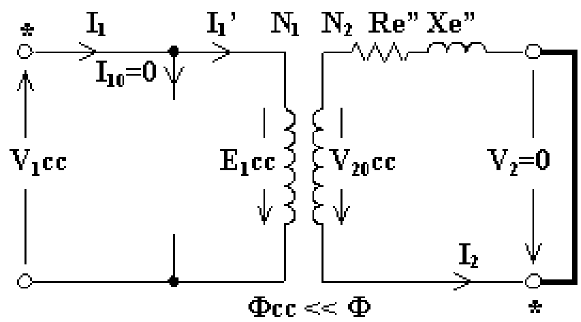
Normalmente la corrente a vuoto e la potenza assorbita a vuoto si esprimono in percento:

$$Io\% = \frac{I_{10}n}{I_1n} \cdot 100 = \frac{I_{20}n}{I_2n} \cdot 100 \; , \quad Po\% = \frac{Pon}{Sn} \cdot 100 \; , \quad \cos\varphi_0 = \frac{Po\%}{Io\%}$$

Valori normali sono **Io% = 1 ÷ 30** , **Po% = 0,2 ÷ 10** passando dai trasformatori trifase di grande potenza ai monofase di piccolissima potenza.

Osservazione: nel funzionamento a vuoto di un trasformatore reale viene assorbita anche una piccola potenza poi dissipata per effetto Joule nel rame dell'avvolgimento di alimentazione. Tuttavia, essendo la corrente assorbita a vuoto molto più piccola della nominale (pochi percento), è lecito trascurare queste perdite.

Funzionamento in cortocircuito del tr monofase reale



Il trasformatore si dice in cortocircuito se l'impedenza collegata ai suoi morsetti d'uscita è nulla, ovvero se **Zu = 0** [Ω] , $\mathbf{V_2 = 0}$ [V]. In tali condizioni è impensabile applicare al trasformatore la sua tensione nominale, infatti la corrente negli avvolgimenti, a causa della piccolissima impedenza interna (l'impedenza longitudinale del circuito equivalente semplificato), tenderebbe ad assumere un valore enormemente più grande del nominale distruggendo così gli avvolgimenti stessi. Per questo motivo, al trasformatore in cortocircuito si applica una tensione ridotta, più precisamente si applica la <u>tensione di cortocircuito</u> che è quella tensione per la quale la corrente negli avvolgimenti, col trasformatore cortocircuitato, assume il valore nominale. Essendo tale tensione molto più piccola della nominale (pochi percento), anche il flusso utile nel nucleo sarà molto inferiore al nominale e, quindi, saranno piccolissime le perdite nel ferro e piccolissima la corrente magnetizzante. In definitiva, nel circuito equivalente semplificato saranno trascurabili (cioè di impedenza infinita) i parametri trasversali.

Se le correnti e la frequenza di alimentazione sono quelle <u>nominali</u>, $\mathbf{I_1n}$, $\mathbf{I_2n}$, **fn**, e la temperatura è quella convenzionale di riferimento, risulta evidente come, misurando la tensione applicata e la potenza assorbita nel funzionamento in cortocircuito, $\mathbf{V_1ccn}$, **Pccn**, sia possibile <u>calcolare i parametri longitudinali</u> del circuito equivalente semplificato:

$$V_{20}ccn = \frac{V_1ccn}{Ko} \ , \ Ze'' = \frac{V_{20}ccn}{I_2n} \ [\Omega]$$

$$Re'' = \frac{Pccn}{I_2n^2} \ [\Omega] \ , \ Xe'' = \sqrt{Ze''^2 - Re''^2} = Re'' \cdot tg\varphi_{CC} \ [\Omega]$$

Normalmente la tensione di cortocircuito e la potenza assorbita in cortocircuito si esprimono in percento:

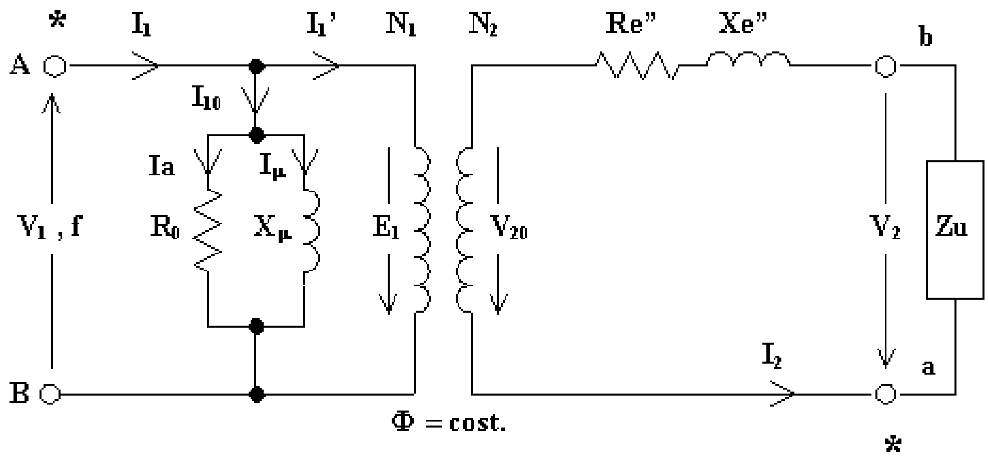
$$Vcc\% = \frac{V_1ccn}{V_1n} \cdot 100 = \frac{V_{20}ccn}{V_{20}n} \cdot 100 \quad , \quad Pcc\% = \frac{Pccn}{Sn} \cdot 100$$

Valori normali sono **Vcc% = 3 ÷ 20** , **Pcc% = 1 ÷ 15** passando dai trasformatori trifase di grande potenza ai monofase di piccolissima potenza.

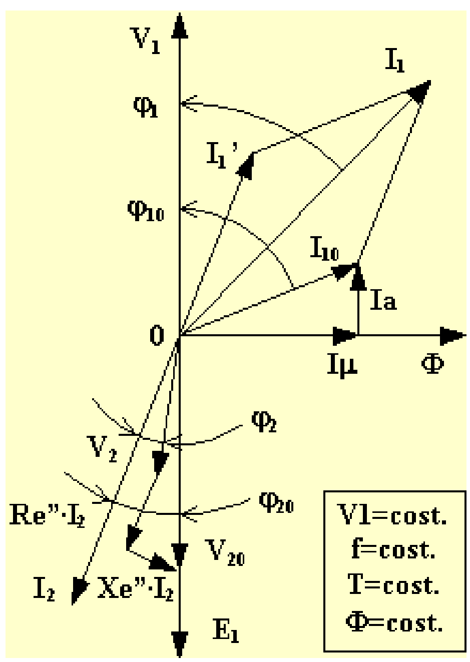
<u>Osservazione</u>: nel funzionamento in cortocircuito di un trasformatore reale viene assorbita anche una piccola potenza poi dissipata nel ferro del nucleo. Tuttavia, essendo la tensione applicata molto più piccola della nominale (pochi percento), è lecito trascurare queste perdite.

<u>Funzionamento a carico del trasformatore monofase reale</u>

Il funzionamento a carico risulta descritto dalle equazioni già presentate. Con riferimento al circuito equivalente semplificato ridotto al secondario:



immaginando che l'impedenza di carico sia Ohmico-induttiva, $\overline{Zu} = Zu\angle\alpha$ con $\alpha > 0°$, si ottiene il diagramma vettoriale sotto riportato (disegnato a partire dal flusso posizionato sul semiasse reale positivo):



In tale diagramma φ_1 è lo sfasamento d'ingresso, φ_{10} è lo sfasamento d'ingresso a vuoto, φ_2 è lo sfasamento d'uscita, φ_{20} è lo sfasamento interno. Ovviamente lo sfasamento d'uscita coincide con l'argomento dell'impedenza di carico, cioè $\varphi_2 = \alpha$. Lo sfasamento interno vale invece:

$$\varphi_{20} = \mathrm{atg}\left(\frac{Xu + Xe''}{Ru + Re''}\right)$$

dove **Xu** e **Ru** sono la reattanza ed la resistenza dell'impedenza di carico. Si osserva come sia $\overline{V_1} = -\overline{E_1}$, questo perché ci stiamo riferendo al circuito equivalente semplificato. La corrente erogata vale:

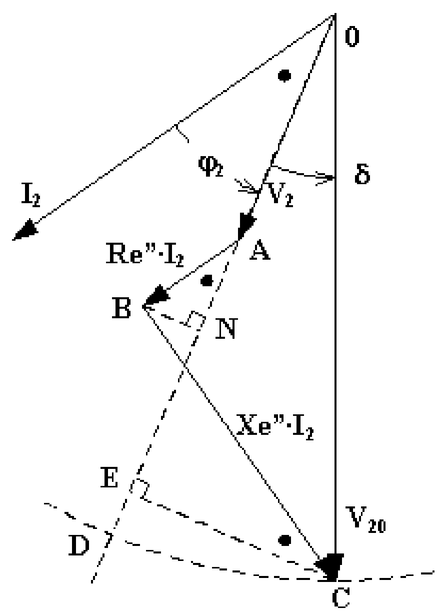
$$\overline{I_2} = \frac{\overline{V_2}}{\overline{Zu}} = \frac{\overline{V_{20}}}{(Re''+Ru) + j \cdot (Xe''+Xu)}$$

La tensione d'uscita a carico $\overline{V_2}$ differisce da quella a vuoto $\overline{V_{20}}$ di una quantità pari alla caduta vettoriale di tensione sull'impedenza equivalente riportata al secondario:

$$\overline{V_2} = \overline{V_{20}} - \overline{I_2} \cdot (Re''+j \cdot Xe'') = \overline{V_{20}} - \overline{I_2} \cdot \overline{Ze''}$$

Caduta di tensione industriale nel tr monofase reale

Viene definita come la differenza aritmetica tra il valore efficace della tensione d'uscita a vuoto ed il valore efficace della tensione d'uscita a carico $\Delta V_2 = V_{20} - V_2$ [V], mantenendo costante la tensione e la frequenza d'alimentazione.



E' possibile calcolarla con un'espressione semplificata. Con riferimento al circuito equivalente semplificato avente i parametri riportati al secondario ed alla figura riportata sopra (relativa ad un carico di natura Ohmico-induttiva), possiamo scrivere:

$$\Delta V_2 = V_{20} - V_2 = O\_D - O\_A = A\_D$$

Se l'angolo δ è piccolo (pochi gradi), allora l'arco **C_D** si può confondere con la semicorda **C_E**, ovvero si può trascurare **E_D** rispetto **A_D**, così che si ha:

$$\Delta V_2 \cong A\_E = A\_N + N\_E$$
$$\Delta V_2 \cong I_2 \cdot (Re'' \cdot \cos\varphi_2 + Xe'' \cdot \mathrm{sen}\varphi_2) \text{ [V]}$$

Per trasformatori correttamente dimensionati e che erogano su carichi normali (Ohmico-induttivi), l'espressione approssimata sopra dimostrata è sufficientemente precisa. Volendo, esiste un'espressione meglio approssimata che noi non stiamo a dimostrare:

$$\Delta V_2 \cong I_2 \cdot (Re'' \cdot \cos\varphi_2 + Xe'' \cdot \operatorname{sen}\varphi_2) + \frac{I_2{}^2 \cdot (Xe'' \cdot \cos\varphi_2 - Re'' \cdot \operatorname{sen}\varphi_2)^2}{2 \cdot V_{20}} \quad [V]$$

Molte volte la c.d.t. industriale viene espressa percentualmente rispetto alla tensione secondaria a vuoto oppure a carico. Nei trasformatori ben costruiti, la c.d.t. industriale a pieno carico assume valori percentuali poco discosti dal **4%**.