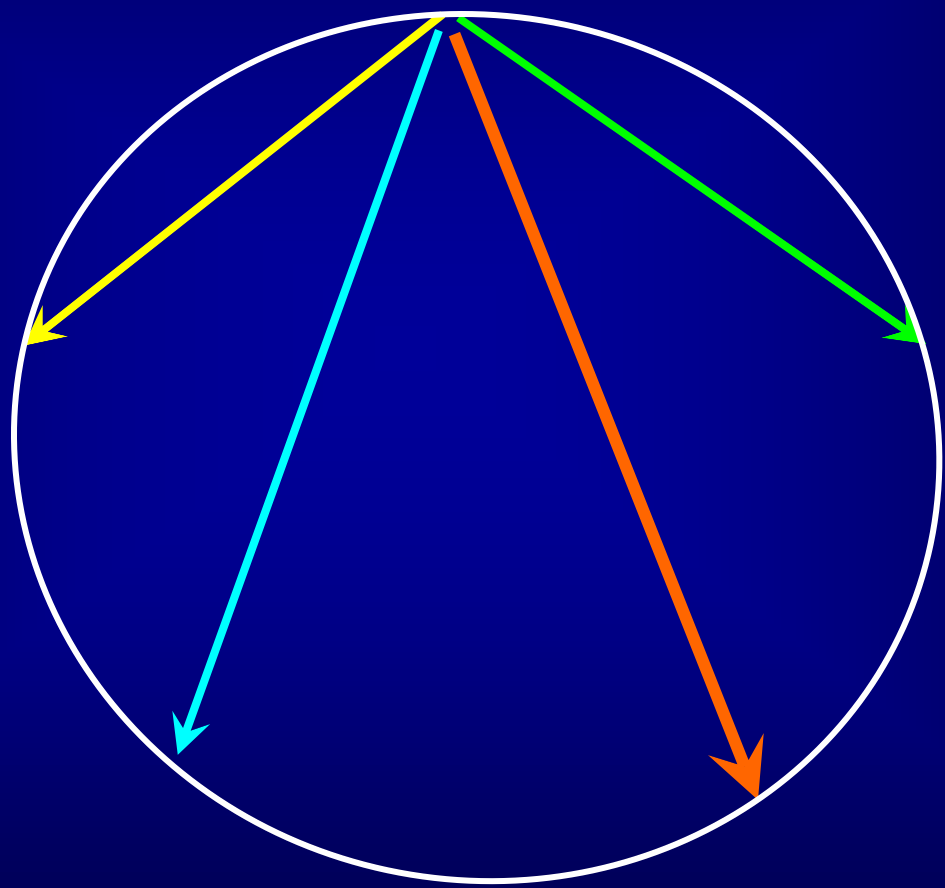
Emilio F. Orsega

Università Ca' Foscari Venezia

Elementi di

ALGEBRA LINEARE

Spazi vettoriali



Premessa

(Da: "*Lezioni di Metodi Matematici della Fisica*", di C. Villi, T.A. Minelli, A. Pascolini - Università di Padova. - Ed. CLEUP, Padova)

"Lo spazio, nella sua accezione più grossolana, è' *ciò* che ci circonda, *ciò* in cui possiamo muoverci, avanti o indietro, a destra o a sinistra, in alto,o in basso: in altre parole, lo spazio è *ciò* in cui siamo abituati a *misurare* la *lunghezza* dei segmenti e la *distanza* fra due punti. Più in generale, lo spazio è l'ambiente in cui avvengono i fenomeni fisici: esso è detto anche *spazio fisico.*

Lo *spazio geometrico* è uno spazio astratto. Le misure di lunghezze di segmenti e di distanze fra punti dello spazio fisico coincidono con analoghe quantità *definite* e calcolate nello spirito della geometria euclidea : ciò genera la grande illusione che la geometria dello spazo *fisico sia* quella euclidea. Il *vuoto* possiede una sua costante dielettrica e una sua permeabilità magnetica: il vuoto non è *spazio* geometrico bensì spazio *fisico.*

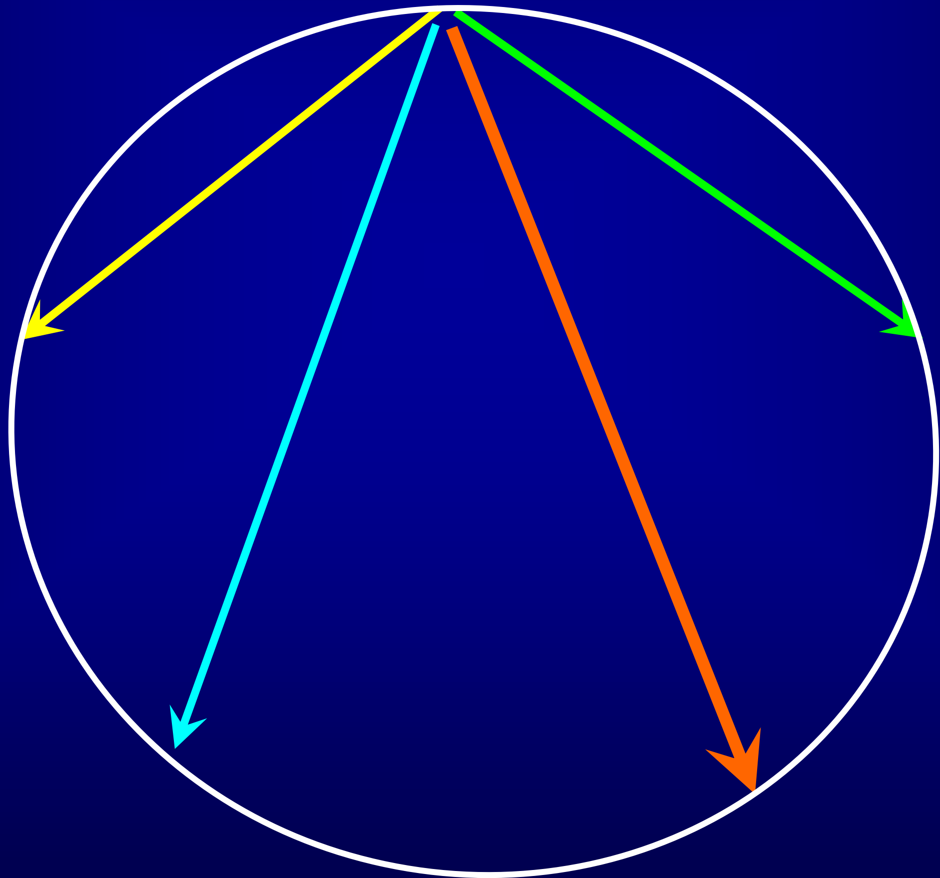
Lo *spazio* fisico è lo spazio geometrico *riempito* dal campo gravitazionale e da campi elettromagnetici. Solo una parte limitata (su scala cosmica) dello spazio fisico è descrivibile dalla geometria euclidea: esso verrà detto *spazio ordinario.*
Nello spazio ordinario si definiscono degli enti di natura vettoriale caratterizzati da un punto di applicazione, direzione e verso. Le forze, le velocità, ecc. sono vettori definiti in spazi astratti (spazio delle forze, spazio delle velocità, ecc.): tali spazi posseggono le stesse proprietà formali dello spazio, euclideo.

Lo spazio *euclideo* è un *modello* per concepire lo spazio ordinario e gli spazi astratti in cui sono definiti vettori che rappresentano quantità fisiche (forze, velocità, ecc.) agenti nello spazio ordinario. In altre parole, lo spazio euclideo, *simula* correttamente *ciò* che circonda, cioè lo spazio ordinario in cui avvengono i fenomeni fisici, *ma non* è *lo spazio ordinario* : lo spazio ordinario mutua da quello euclideo il formalismo, matematico.

Questa simbiosi porta a generalizzare il concetto di spazio anche a ciò che non ci circonda, che non ha alcuna corrispondenza con lo spazio ordinario ed è una pura invenzione della mente, nel senso che è descrivibile mediante enti matematici e *in esso* sono adeguatamente definite delle quantità che hanno le stesse proprietà delle lunghezze di segmenti e delle distanze fra punti nello spazio ordinario, ovvero delle norme e delle distanze fra punti in quello euclideo.

Il concetto di spazio può altresì essere *generalizzato* anche senza alcun riferimento a norme e distanze, partendo da altre operazioni che si possono compiere nello spazio ordinario, quale, ad esempio, la *somma dei segmenti secondo la regola del parallelogramma."*

Calcolo vettoriale



Calcolo vettoriale

L'introduzione del concetto di vettore, e il conseguente calcolo vettoriale è, curiosamente, nato (nel sec. XIX) sostanzialmente nella rappresentazione *algebrica*, detta anche *analitica* – v. più avanti) come una componente di "strani" enti, piuttosto complicati e di difficile applicazione pratica: i quaternioni di Hamilton.

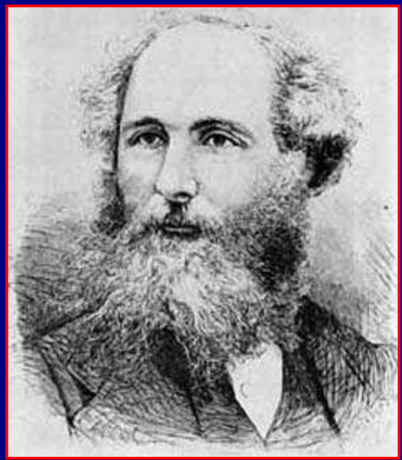
Sir William Rowan HAMILTON

(Dublino, 1805-1865)

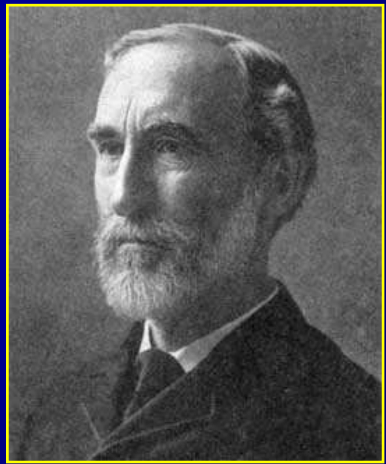
Calcolo vettoriale

Lo svipuppo del calcolo vettoriale è dovuto principalmente ad alcuni eminenti fisici e matematici, tra i quali spiccano:

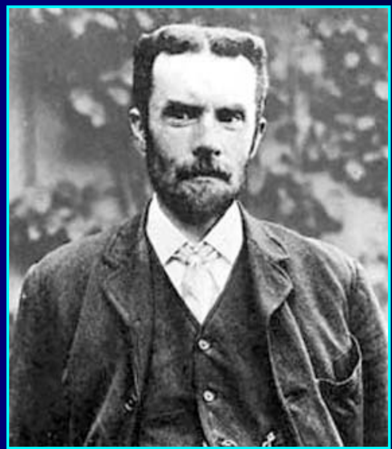
Hermann Günter GRASSMAN (Prussia, 1809-1877)



James Clerk MAXWELL (Edinburgo, 1831-1879)



Josiah Willard GIBBS (U.S.A., 1839-1903)



Oliver HEAVISIDE (Londra, 1850-1925)

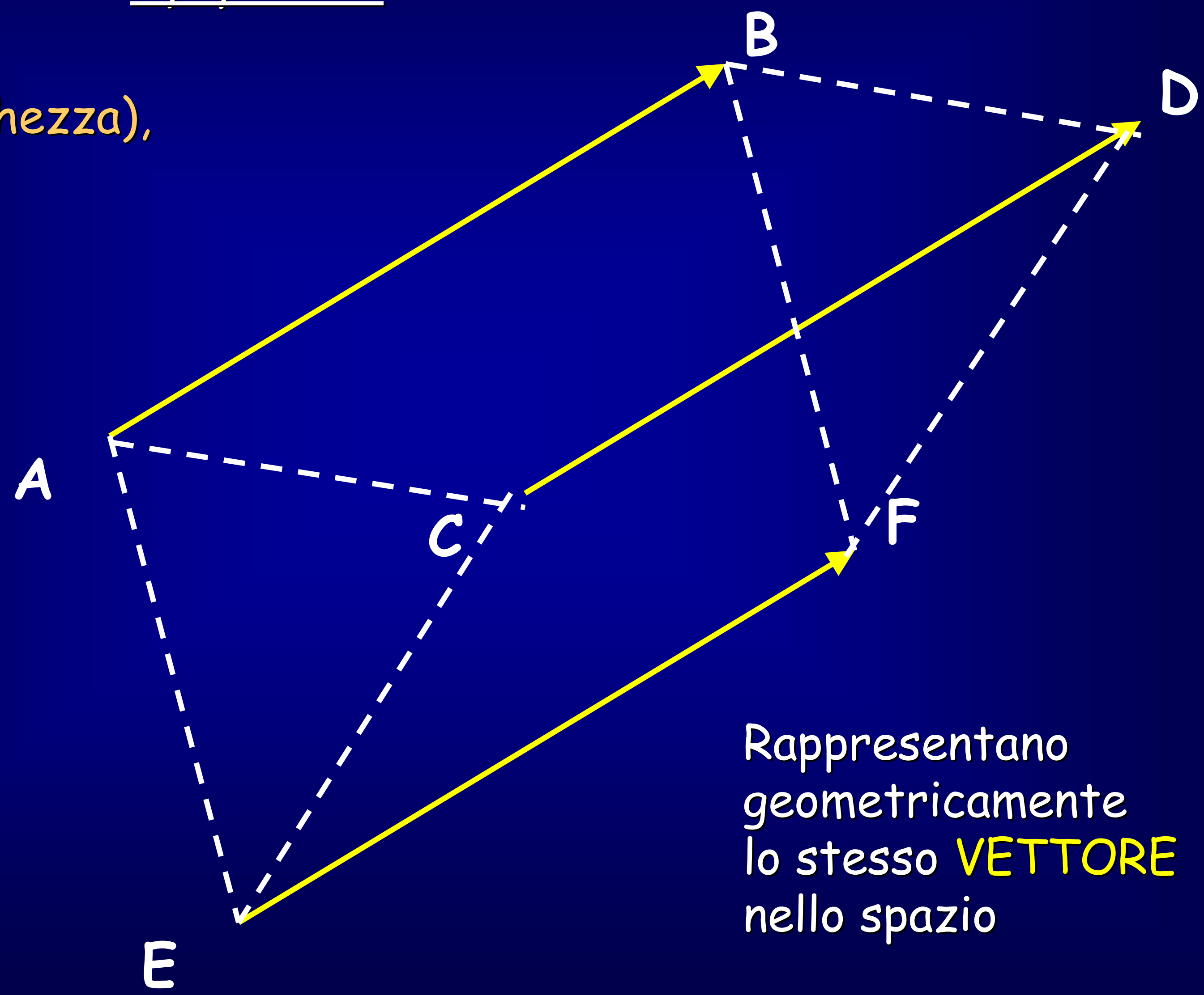
Segmenti orientati *equipollenti*:

hanno stessi

modulo (lunghezza),

direzione,

verso



Rappresentano geometricamente lo stesso VETTORE nello spazio

I **vettori**

rappresentati come *segmenti orientati*

(rappresentazione *geometrica*)

si intendono con l'origine coincidente con l'origine del *sistema di riferimento* (assi coordinati)

eccetto nei casi in cui si parli di "*vettori applicati*" (fisica) per i quali si specifica la collocazione del punto origine (*punto di applicazione*)

Possono appartenere a uno *spazio*:

monodimensionale (retta orientata, **x**),

bidimensionale (piano, **xy**)

o

tridimensionale (spazio tridim., **xyz**),

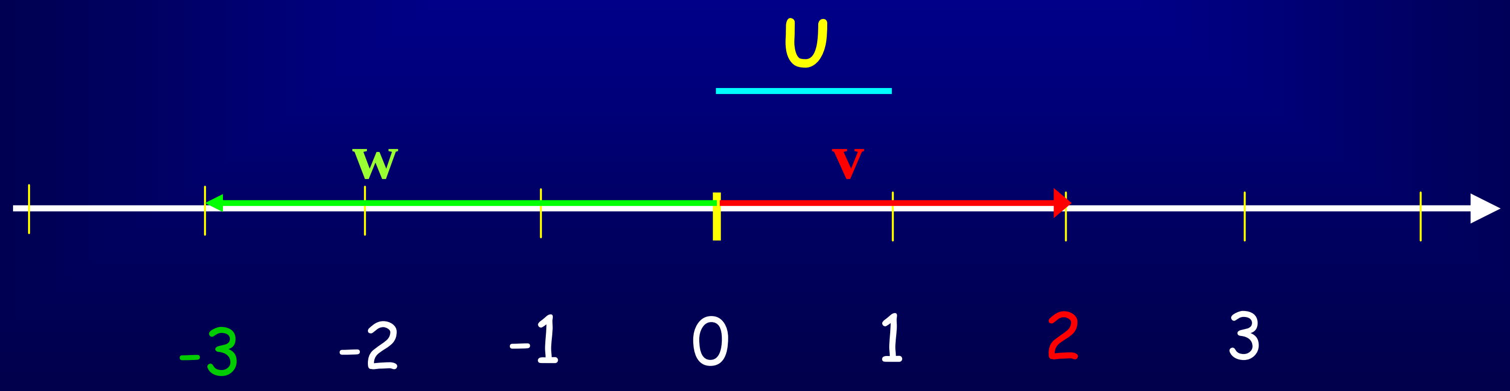
Vettori dello spazio monodimensionale (R^1)

Segmenti orientati applicati all'origine di una retta orientata sulla quale è stato stabilito un

sistema di ascisse:

scelta un'unità di misura (U), si stabilisce una *corrispondenza biunivoca* tra tutti i numeri reali e tutti i punti della retta.

Ad ogni segmento orientato è associato un numero reale. Es.: al segmento **v** è associato il numero +2, a **w** è associato il numero –3, al punto origine il numero 0.



Vettori dello spazio monodimensionale ($\boldsymbol{R}^1$)

Tutti i vettori dello spazio *monodimensionale euclideo* possono quindi essere rappresentati da

tutti i segmenti orientati applicati all'origine della retta orientata (rappresentazione *geometrica*)

oppure da
tutti i numeri reali (rappresentazione *algebrica* o *analitica*)
In entrambi i casi si definiscono le operazioni di *addizione* e *sottrazione* tra vettori

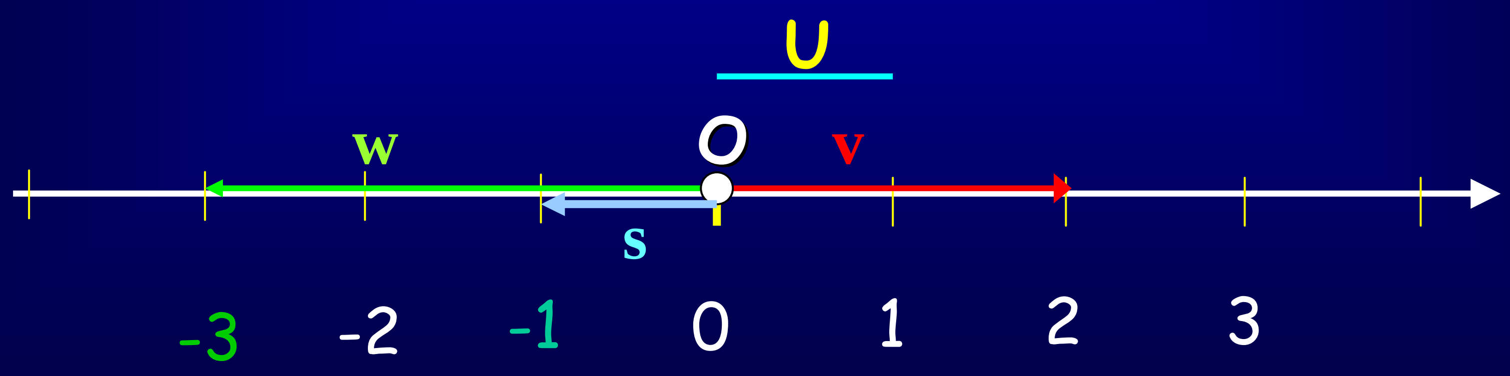
Vettori dello spazio monodimensionale

Es.: Rappresent. *algebrica (analitica)*

$v + w = s \longrightarrow (+2) + (-3) = -1$

$s - v = w \longrightarrow (-1) - (+2) = -3$

Rappresent. *geometrica*

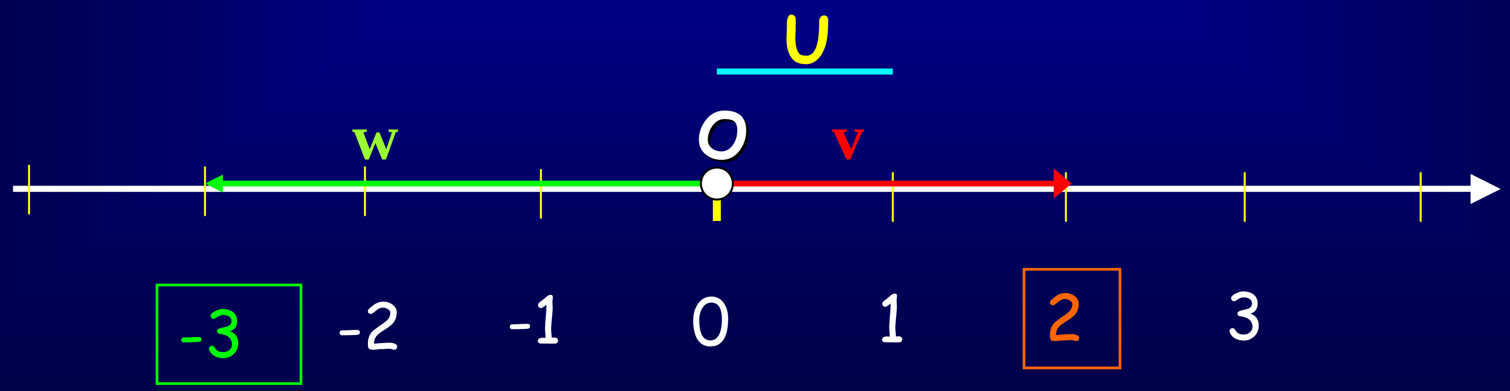


Vettori dello spazio monodimensionale

I vettori, rappresentati come segmenti orientati su una retta, si possono quindi rappresentare come NUMERI REALI (rappresentazione *algebrica o analitica*).

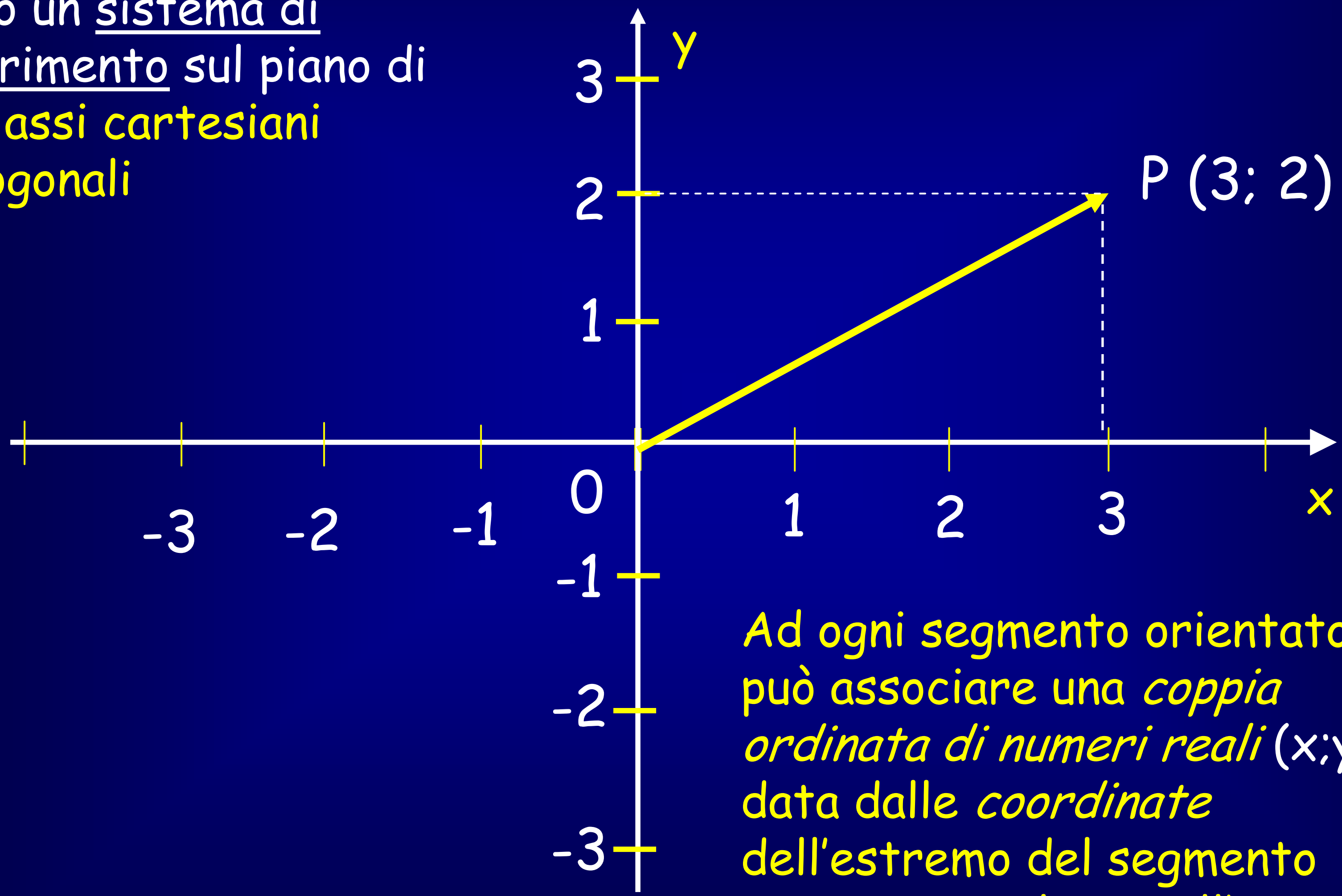
Si *sommano* e si *sottraggono* con le stesse regole di addizione e sottrazione tra numeri relativi.

L'*elemento neutro* **O** dell'addizione tra vettori (tale che per ogni **v** si ha che **v** + **O** = **v**) è il *vettore nullo.* Algebricamente è rappresentato dal numero 0 (zero), geometricamente dal punto origine



Vettori dello spazio bidimensionale (R^2)

Dato un sistema di riferimento sul piano di due assi cartesiani ortogonali

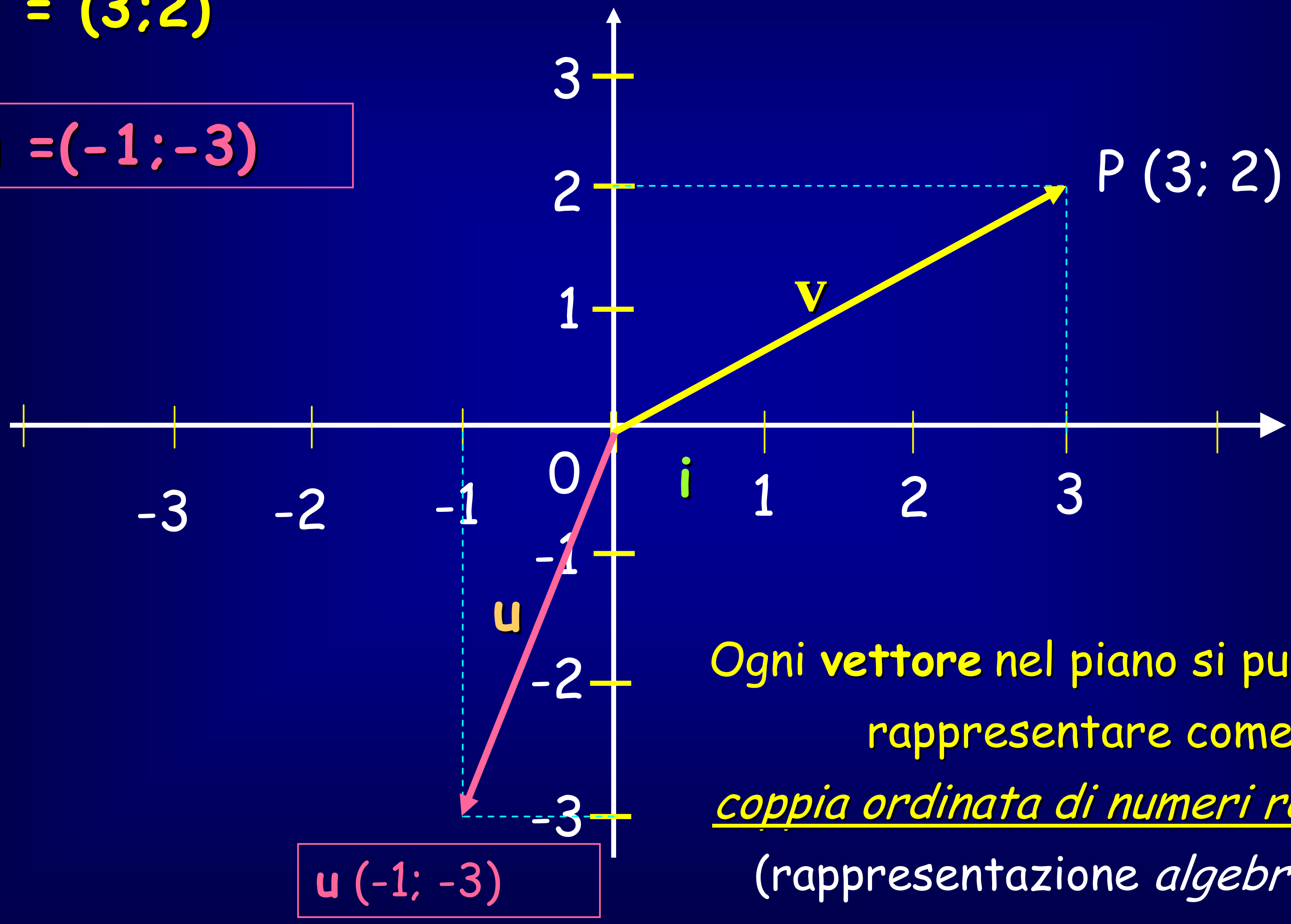


Ad ogni segmento orientato si può associare una *coppia ordinata di numeri reali* (x;y), data dalle *coordinate* dell'estremo del segmento orientato applicato all'origine degli assi

Vettori dello spazio bidimensionale (R^2)

v = (3;2)

u =(-1;-3)



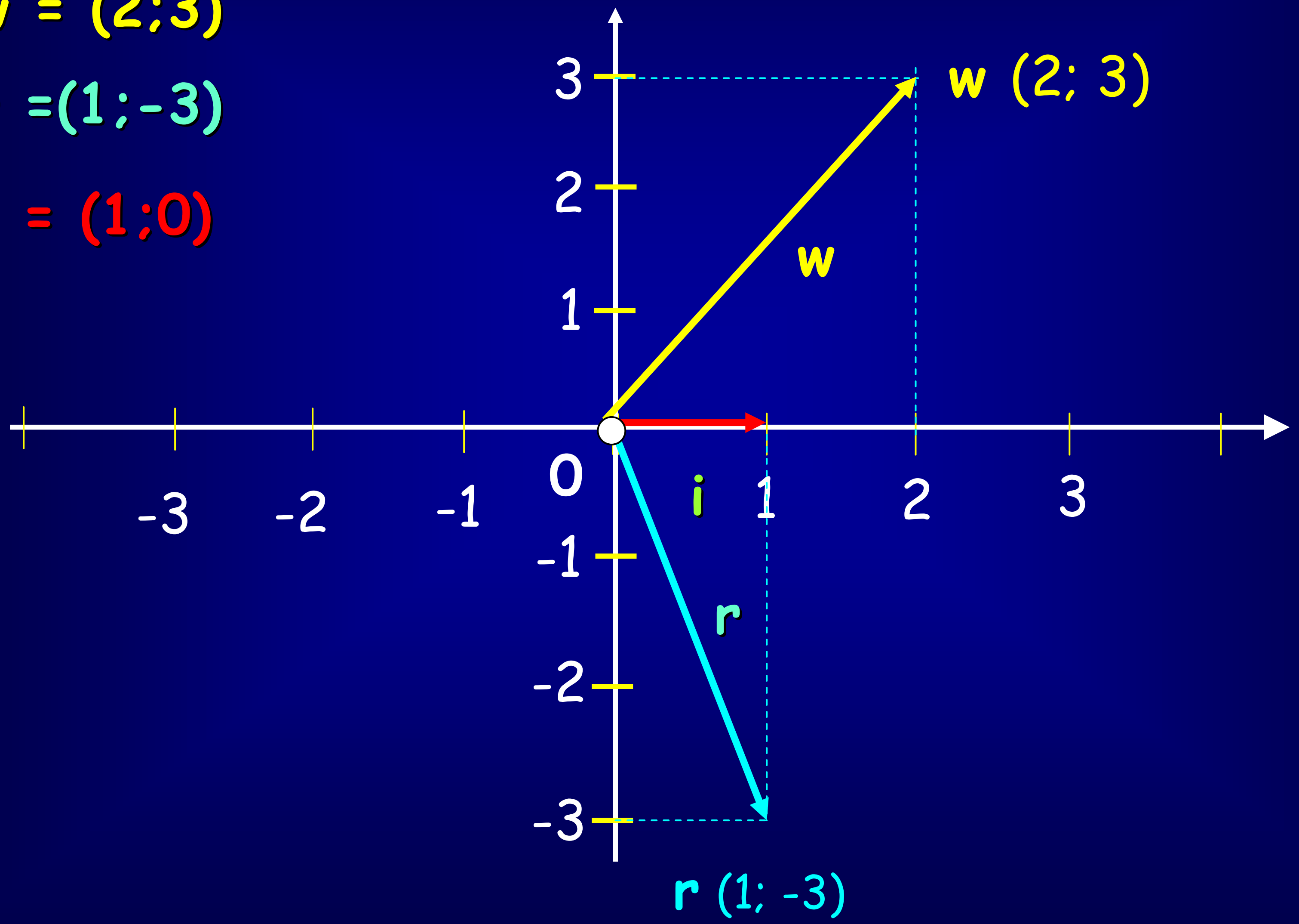
Ogni **vettore** nel piano si può quindi rappresentare come *coppia ordinata di numeri reali* (rappresentazione *algebrica* o analitica)

Vettori dello spazio bidimensionale (R^2)

$w = (2;3)$

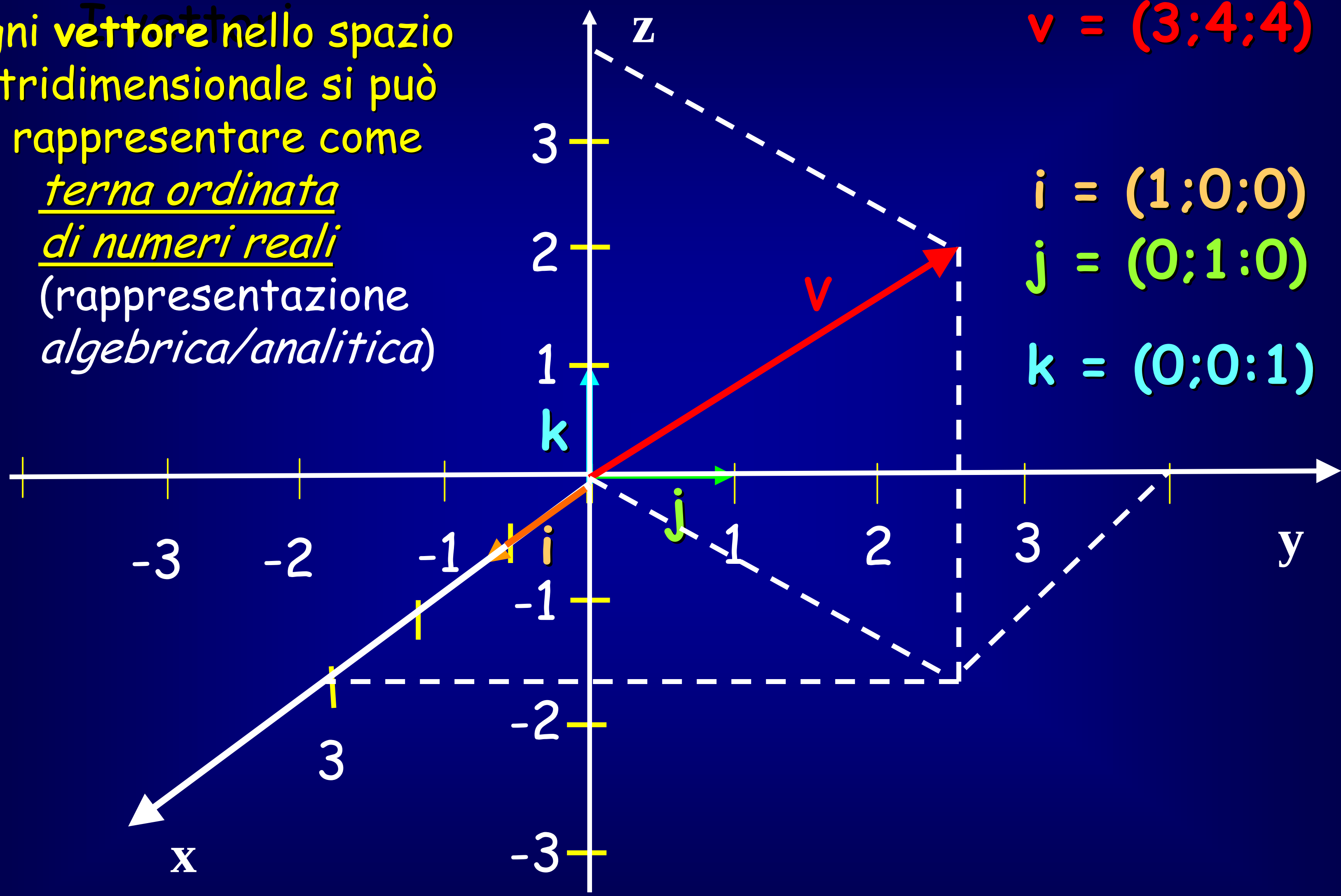
$r = (1;-3)$

$i = (1;0)$



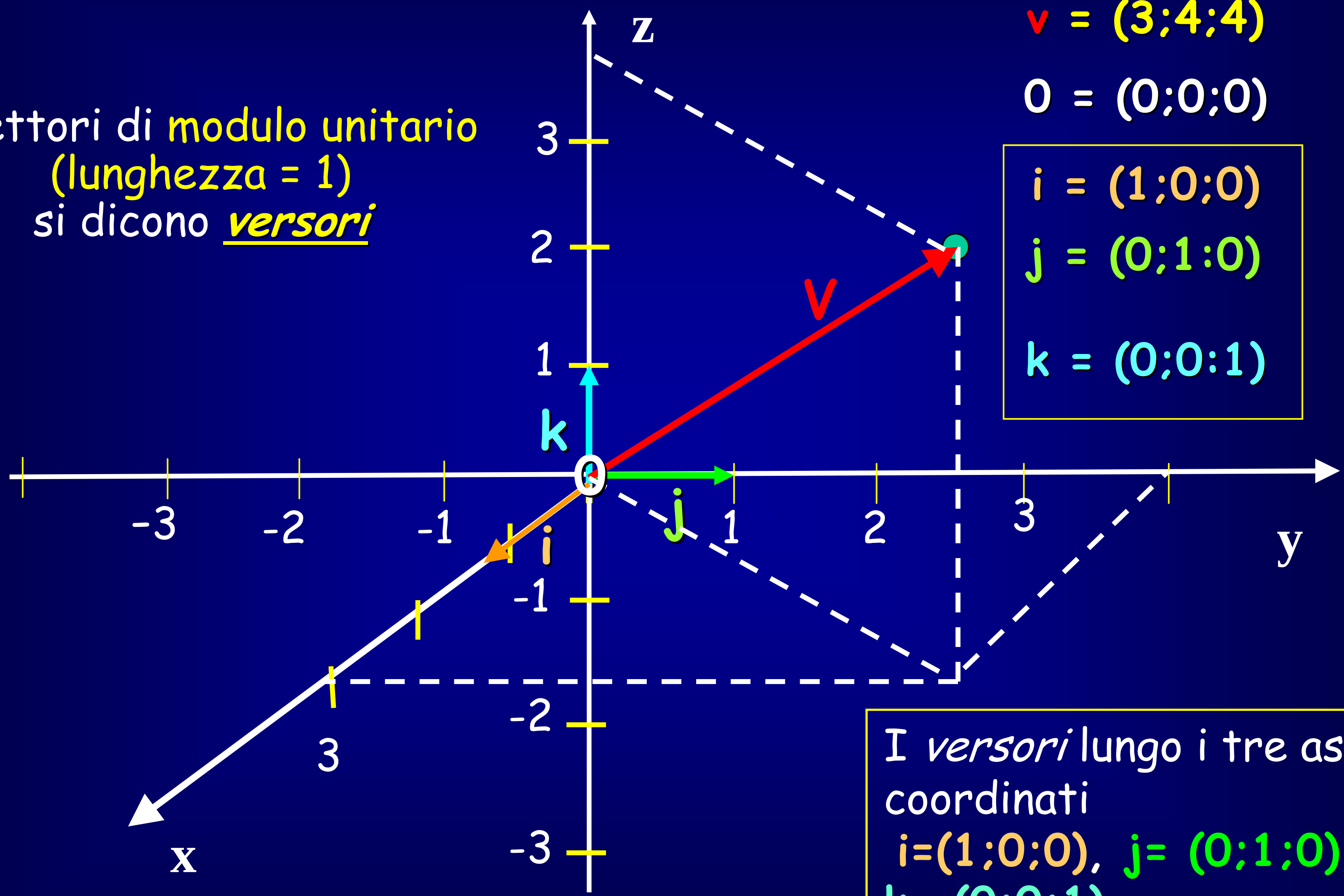
Vettori dello spazio tridimensionale (R^3)

Ogni **vettore** nello spazio tridimensionale si può rappresentare come *terna ordinata di numeri reali* (rappresentazione *algebrica/analitica*)



Vettori dello spazio tridimensionale (R^3)

I vettori di modulo unitario (lunghezza = 1) si dicono ***versori***



v = (3;4;4)

0 = (0;0;0)

i = (1;0;0)

j = (0;1:0)

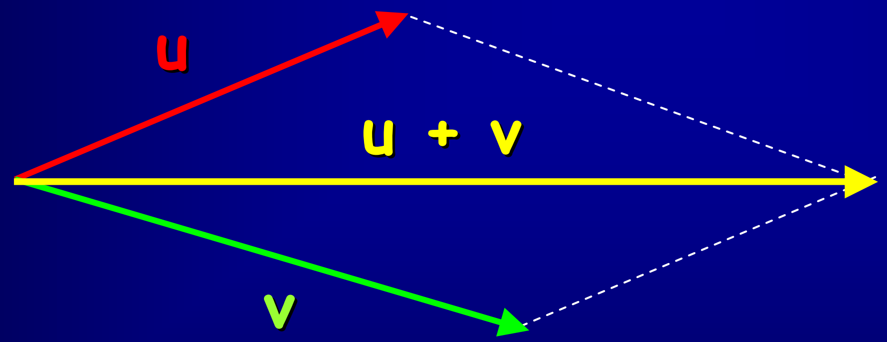
k = (0;0:1)

I *versori* lungo i tre assi coordinati
i=(1;0;0), j= (0;1;0),
k= (0;0;1)
Sono i **versori principali**

Somma e differenza di vettori

In rappresentazione *geometrica* la ***somma*** di due vettori degli spazi R^2 e R^3 *è data dalla*

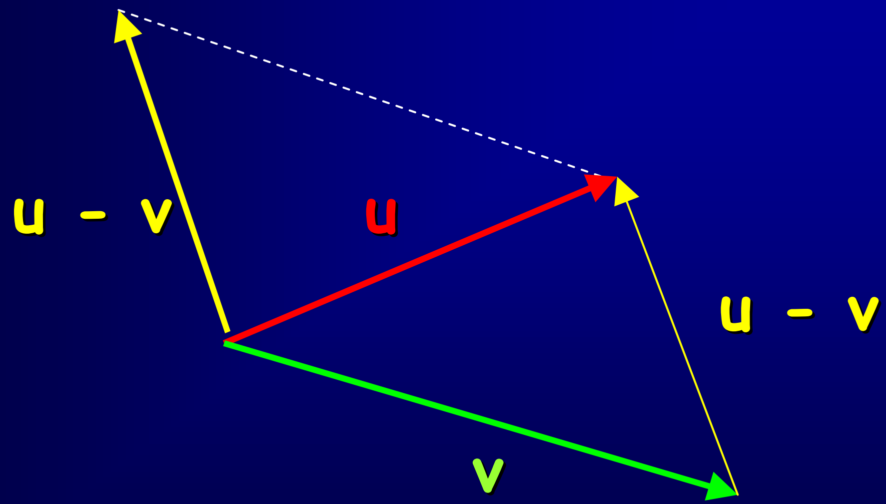
"regola del parallelogramma":



Somma e differenza di vettori

In rappresentazione *geometrica* la ***differenza*** di due vettori si ottiene come indicato in figura:

("La differenza di due vettori è uguale alla somma del primo con l'*opposto* del secondo")



(I due segmenti orientati gialli sono *equipollenti e quindi rappresentano lo stesso vettore differenza* **u – v**)

Somma e differenza di vettori

In rappresentazione *algebrica* la ***somma (o la differenza)*** di due vettori (di coordinate date) è un terzo vettore che ha come coordinate la somma (o la differenza) delle coordinate corrispondenti.

Es,:

dati: **u** = (1; -3; 2); **v** = (2; 0; 5)

u + v = (3; -3; 7) ; **u - v** = (-1; -3; -3)

Vettori dello spazio n-dimensionale (R^n)

Oltre le tre dimensioni non è possibile nessuna rappresentazione geometrica dei vettori, ma solo

la **rappresentazione algebrica (o analitica)**:

Un vettore è rappresentato da una

successione ordinata di n numeri (n-pla ordinata)

$\mathbf{v} = (x_1; x_2; x_3; \ldots.; x_n)$

Vettori dello spazio n-dimensionale (R^n)

Esempi:

u = (1; -3; 2.5; 2) è un vettore dello spazio R^4

v = (2; 0; 5; -2; 8) è un vettore dello spazio R^5

w = (1; -3; 2.5; 2; 0; 1; -5)) è un vettore dello spazio R^7

Vettori dello spazio n-dimensionale ($\boldsymbol{R}^n$)

La somma di due vettori nello spazio $\boldsymbol{R}^n$ è un vettore che ha per coordinate la somma delle coordinate corrispondenti (analogamente per la differenza).

Se: $\mathbf{u} = (x_1; x_2; x_3; \dots x_n)$ e $\mathbf{v} = (y_1; y_2; y_3; \dots y_n)$

Allora: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1+y_1; x_2+y_2; x_3+y_3; \dots; x_n+y_n)$

Es,:

$\mathbf{u} = (1; -3; 2.5; 2)$; $\mathbf{v} = (2; 0; 5; -2)$

$u + v = (3; -3; 7.5; 0)$

Modulo di un vettore

Dato il vettore **v**, il suo *modulo* $|\mathbf{v}|$ è la *lunghezza*, in valore assoluto, del segmento orientato che rappresenta il vettore (fino a tre dimensioni - spazio $\boldsymbol{R}^3$)

Se un vettore è dato mediante le sue coordinate:

$$\mathbf{v} = (x;\ y;\ z) \Rightarrow |\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

L'espressione sotto radice (x2 + y2 + z2) è anche detta norma del vettore **v**. Come si vedrà più avanti, essa è uguale al *prodotto scalare* del vettore per se stesso, **v v = v2**

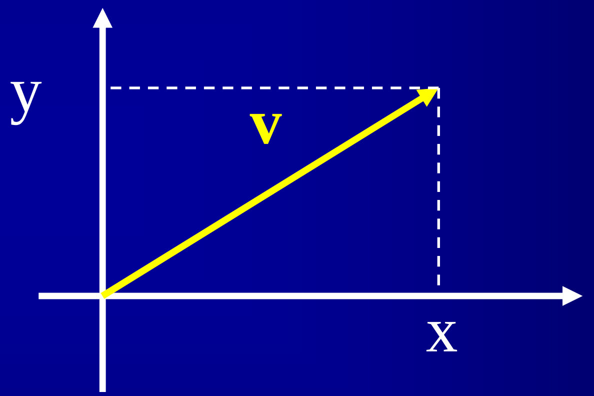
E, in generale, per un vettore dello spazio $\boldsymbol{R}^n$ (vettore a *n* coordinate), il suo modulo è dato da:

$$\mathbf{v} = (x_1;\ x_2;\ x_3;\ \ldots;\ x_n) \Rightarrow |\mathbf{v}| = \sqrt{\sum_1^n {}_i\, x_i^{\,2}}$$

Modulo di un vettore

Dato il vettore **v** sul piano (spazio R^2), definito analiticamente da *due* coordinate, **v** = (x;y), il suo *modulo* $|\mathbf{v}|$ è dato da:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Esso deriva dall'applicazione del Teorema di Pitagora nella rappresentazione geometrica, come facilmente si desume dalla figura

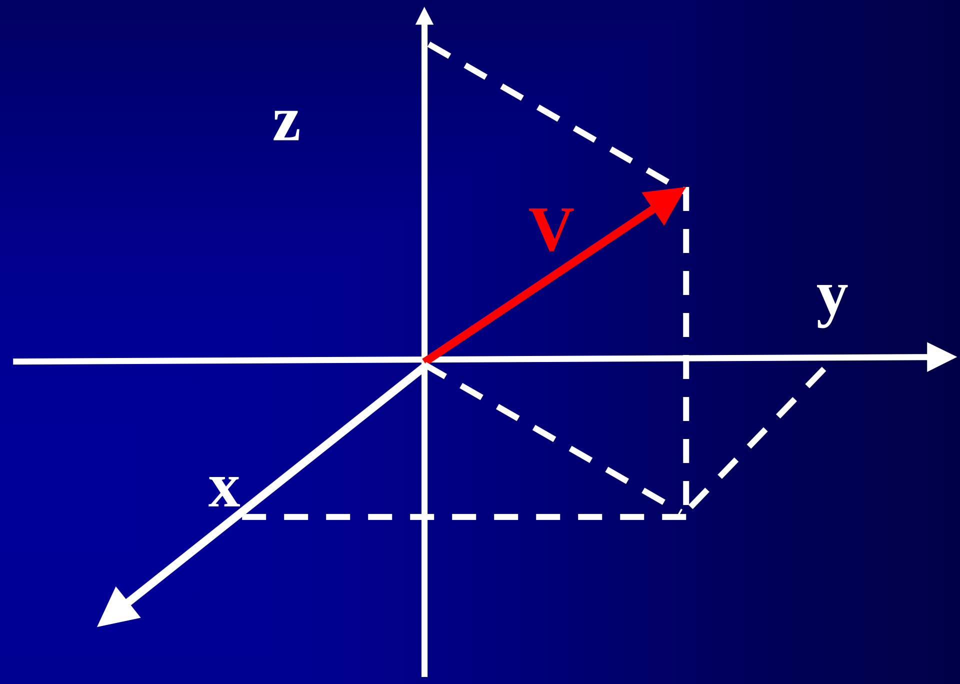
Modulo di un vettore

La precedente relazione per il modulo di un vettore dello spazio ***R*** ^{3} (vettore a tre coordinate):

v = (x; y; z) $\Rightarrow$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

deriva dal *Teorema di Pitagora generalizzato nello spazio.*



Si generalizza ulteriormente per gli spazi astratti ***R*** ^{n} a più di tre dimensioni, portando alla già citata relazione generale:

$$\mathbf{v} = (x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n) \Rightarrow |\mathbf{v}| = \sqrt{\sum_{1}^{n} {}_i x_i^2}$$

Distanza tra due punti

Dati due vettori:

$\mathbf{u} = (x_1; x_2; x_3)$

$\mathbf{v} = (y_1; y_2; y_3)$

Il modulo della *differenza* tra i due vettori *u* e **v** (in R^2 o R^3

$|\mathrm{u} - \mathbf{v}|$ è dato da:

$$|\mathrm{u} - \mathbf{v}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

dove il terzo addendo $(z_1 - z_2)^2$ è nullo nel caso che i vettori siano di R^2 *(vettori del piano x, y).*

Distanza tra due punti

Dati due vettori:

$u = (x_1; x_2; x_3); v = (y_1; y_2; y_3)$

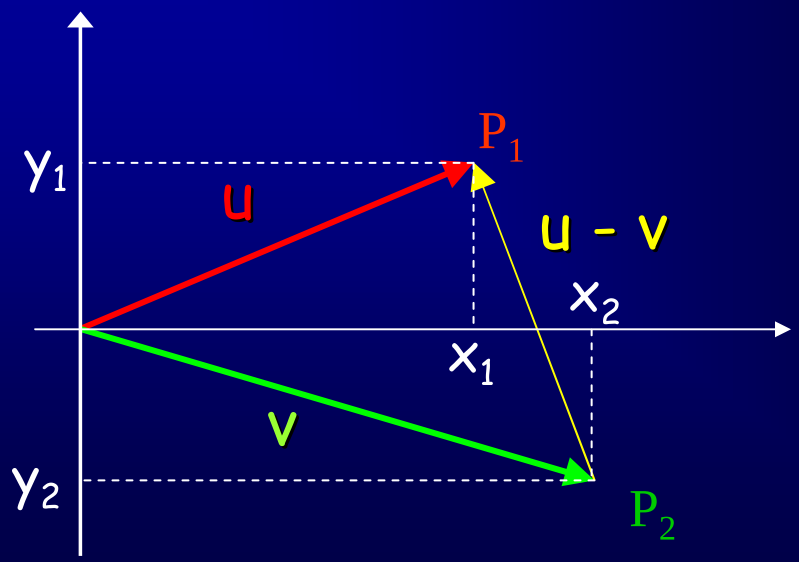
se consideriamo i loro estremi P_1 e P_2 (le cui coordinate sono quelle indicate), il *modulo della differenza dei due vettori* (vedi rappresentazione geometrica – dia n° 23 -) corrisponde alla distanza (numero assoluto!) tra i punti estremi P_1 e P_2.

Nell' esempio in figura abbiamo:

$P_1 = (x_1; y_1); P_2 = (x_1; y_1)$

La loro distanza, $d(P_1P_2)$ è:

$$d(P_1P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$



PRODOTTI

Prodotto di un numero per un vettore

Per qualsiasi insieme di vettori si definisce il *prodotto di un numero (reale) c per un vettore* **v** :

$$\mathbf{u} = c\,\mathbf{v}$$

Il risultato di tale moltiplicazione è un vettore (**u**) che ha:

- stessa direzione di **v** (**u** parallelo a **v**)

- verso concorde o discorde a quello di v, a seconda che c sia rispettivamente positivo o negativo

-modulo di **u** uguale a modulo di c per modulo di **v**

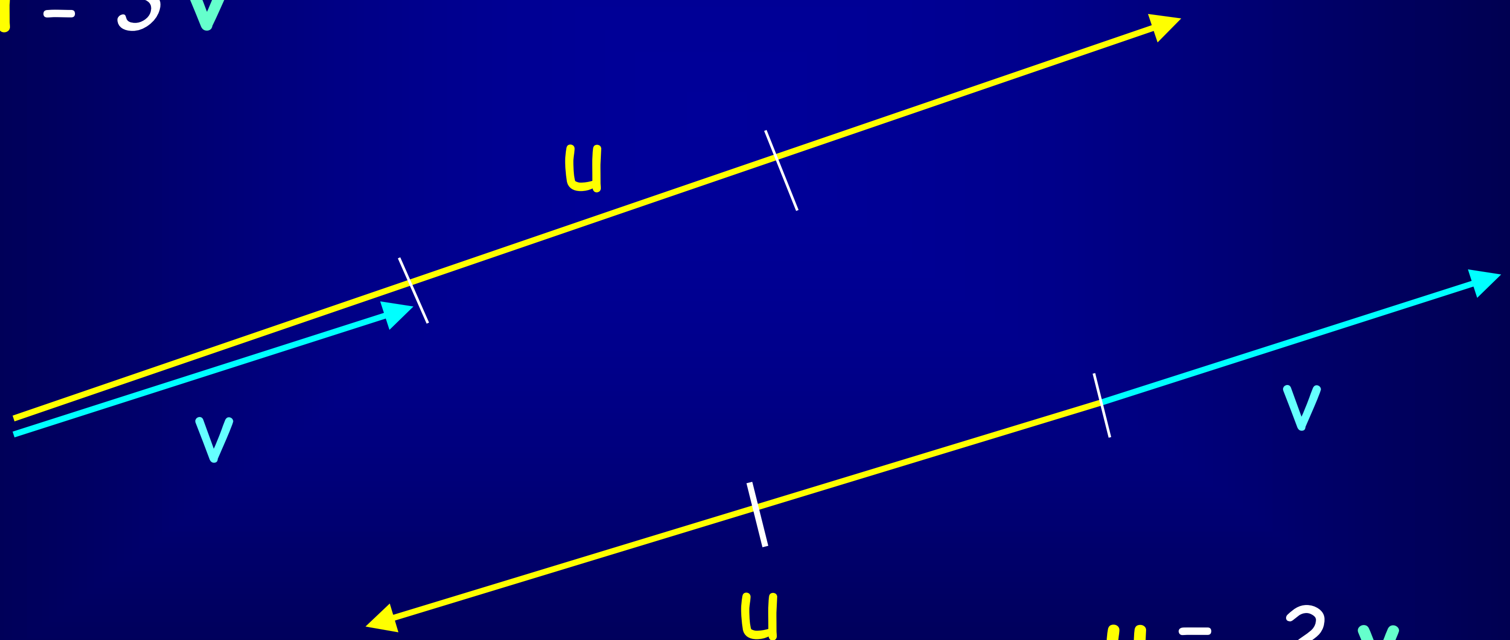
$$|\mathbf{u}| = |c|\,|\mathbf{v}|$$

PRODOTTI

Prodotto di un numero per un vettore

Es.:

$u = 3\,v$



$u = -2\,v$

PRODOTTI

Prodotto di un numero per un vettore

In rappresentazione analitica (vettori rappres. mediante le coordinate), il prodotto di c per un vettore **v** si ottiene moltiplicando ciascuna coordinata per c.

Es.: sia dato: **v** = (2; -3; 1)

u = 3 **v** = 3 (2; -3; 1) = (6; -9; 3)

w = -2 **v** = -2 (2; -3; 1) = (-4; 6; -2)

PRODOTTI

Prodotto di un numero per un vettore

Quindi si può dare un *criterio di parallelismo* tra due vettori:

Due vettori u e v (non nulli) sono *paralleli* (o *proporzionali*) *se e solo se* uno di essi si può ottenere dall'altro moltiplicandolo per un opportuno numero c, cioè se le coordinate dei due vettori sono proporzionali

Ovvero: **u || v**

se esiste un numero c tale che **v** = c**u**

Es.: **u** = (2; -1; 5) e **v** = (-8; -4; -20)

sono paralleli, poiché **v** = -4**u**

Le coordinate di u e v risultano *proporzionali* (è costante il rapporto tra le coordinate corrispondenti:

2/(-8) = -1/(-4) = 5/(-20) = -4

PRODOTTI

Prodotto *scalare* o *interno* di due vettori

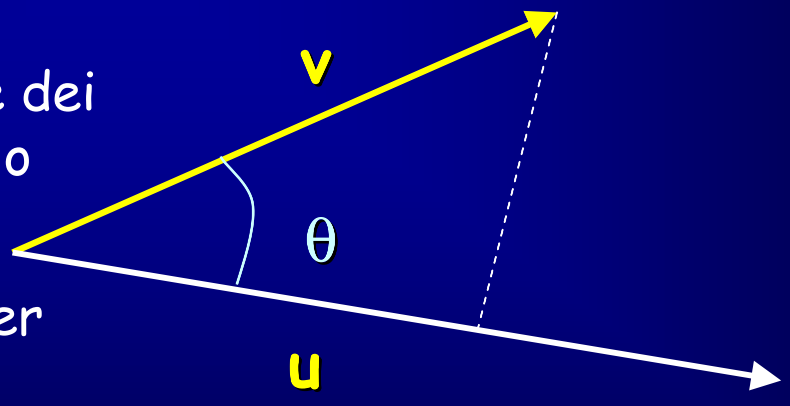
Esso non è un vettore, ma un *numero* (o *scalare*)

In rappresentazione geometrica:

$$\mathbf{u}\ \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\theta$$

Prodotto dei moduli (lunghezze dei vettori) per il coseno dell'angolo tra i vettori

ovvero: modulo di un vettore per la proiezione dell'altro sulla direzione del primo



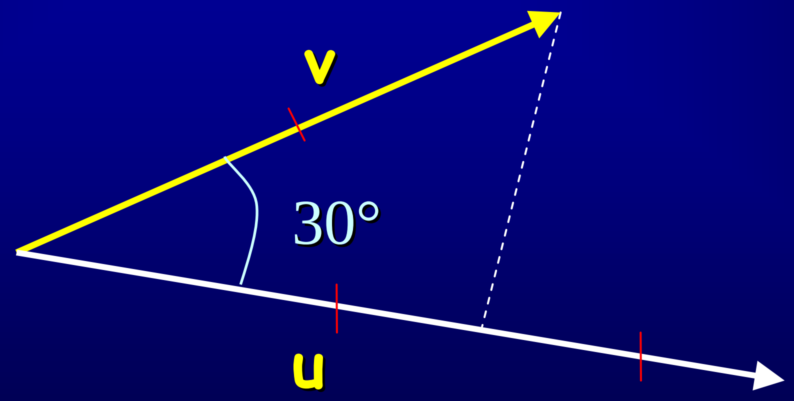
PRODOTTI

Prodotto *scalare o interno* di due vettori

Esempio 1:

$|\mathbf{v}| = 2;\ |\mathbf{u}| = 2.2;\quad \theta = 30° \Rightarrow \cos\theta = \sqrt{3}/2$

$\mathbf{u}\ \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos\theta = 2 \bullet 2.2 \bullet \sqrt{3}/2 \approx 3.81$



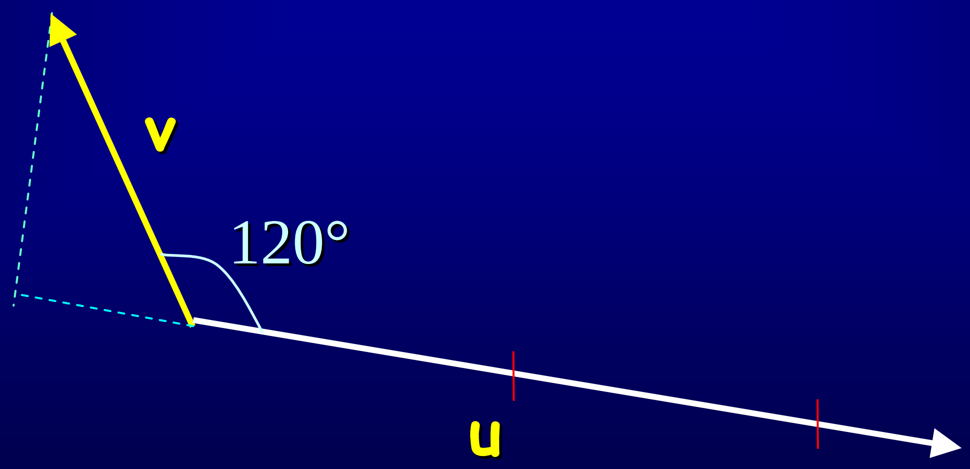
PRODOTTI

Prodotto *scalare o interno* di due vettori

Esempio 2:

$|\mathbf{v}| = 1;\ |\mathbf{u}| = 2.2;\quad \theta = 120° \Rightarrow \cos\theta = -1/2$

$\mathbf{u}\ \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos\theta = 1 \bullet 2.2 \bullet (-1/2) = -1.1$



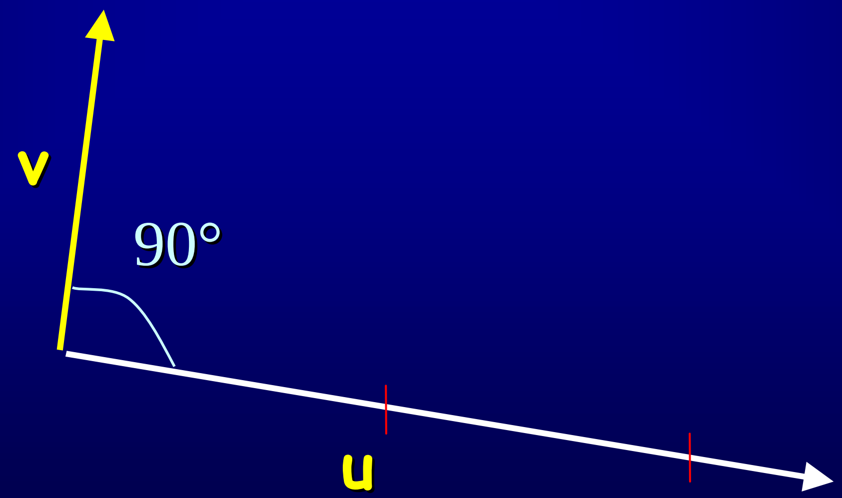
PRODOTTI

Prodotto *scalare o interno* di due vettori

Esempio 3:

$|\mathbf{v}| = 1;\ |\mathbf{u}| = 2.2;\quad \theta = 90° \Rightarrow \cos\theta = 0$

$$\mathbf{u}\ \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\ |\mathbf{v}| \cos\theta = 1 \bullet 2.2 \bullet 0 = 0$$



PRODOTTI

Prodotto *scalare* o *interno* di due vettori

In rappresentazione algebrica:

Il *prodotto scalare* si può ottenere se sono date le coordinate dei vettori :

$\mathbf{u} = (x_1; y_1; z_1)$

$\mathbf{v} = (x_2; y_2; z_2)$

Il loro prodotto scalare è:

$\mathbf{u}\ \mathbf{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$

Es.: $\mathbf{u} = (3; -1; 4)$; $\mathbf{v} = (2; 5; -3)$

$\mathbf{u}\ \mathbf{v} = 3 * 2 + (-1) * 5 + 4 * (-3) = -11$

PRODOTTI

Prodotto *scalare* o *interno* di due vettori

In rappresentazione algebrica:

Il prodotto scalare di due vettori nello spazio n-dimensionale $\mathbb{R}^n$ (n coordinate):

u = $(x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n)$

v = $(y_1; y_2; y_3; \ldots; y_n)$

Il loro *prodotto scalare* è: **u v** = $\sum_{1}^{n}{}_i \; x_i y_i$

Es.: **u** = (3; -1; 4; 0; 5) ; **v** = (2; 5; -3; 1; -2)

u v = $3*2 + (-1)*5 + 4*(-3) + 0*1 + 5*(-2) = -21$

PRODOTTI

Prodotto *scalare* o *interno* di due vettori

Attraverso il prodotto scalare possiamo dare la:

Condizione di perpendicolarità tra due vettori :

*Due vettori (siano **u** e **v**)* non nulli sono *perpendicolari* (o *ortogonali*) se e solo se

Il loro prodotto scalare è nullo (uv=0)

Es.: $\mathbf{u} = (3; -1; -1)$; $\mathbf{v} = (2; 5; 1)$

$$\mathbf{u}\ \mathbf{v} = 3 * 2 + (-1) * 5 + (-1) * (1) = 0 \ ;$$

i due vettori sono perpendicolari

PRODOTTI

Prodotto *scalare* o *interno* di due vettori

Il *modulo* (o *norma*) di un vettore di uno spazio $\boldsymbol{R}^n$ (vettore a *n* coordinate):

$$\mathbf{v} = (x_1;\ x_2;\ x_3;\ \ldots;\ x_n) \Rightarrow |\mathbf{v}| = \sqrt{\sum_1^n {}_i\, x_i^{\ 2}}$$

si può esprimere come la radice quadrata del prodotto scalare del vettore per se stesso ($\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{v}^2$):

$$|\mathbf{v}| = (\mathbf{v} \times \mathbf{v})^{1/2} = (\mathbf{v}^2)^{1/2}.$$

Uno spazio vettoriale per il quale sia stata definita la norma dei suoi vettori si dice "*normato*".

PRODOTTI

Prodotto *vettoriale o esterno* di due vettori

Esso è un *vettore* e si indica con la scrittura: **u** Λ **v**

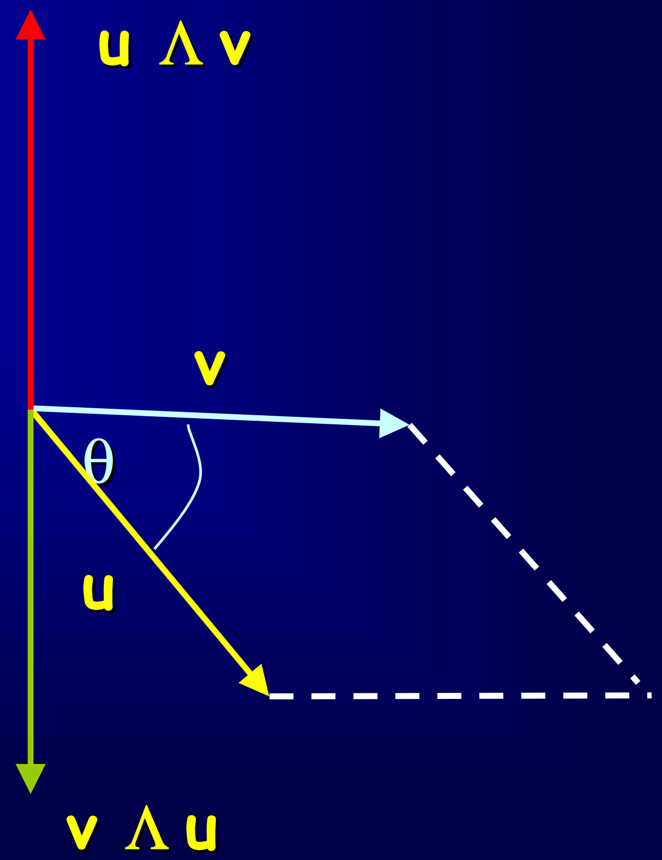
Come si calcola:

Modulo: $|\mathbf{u}\ \Lambda\ \mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\,\mathrm{sen}\,\theta$

(area del parallelogrammo di lati **u** e **v**)

Direzione: perpendicolare al piano di **u** e **v**

Verso: come in figura



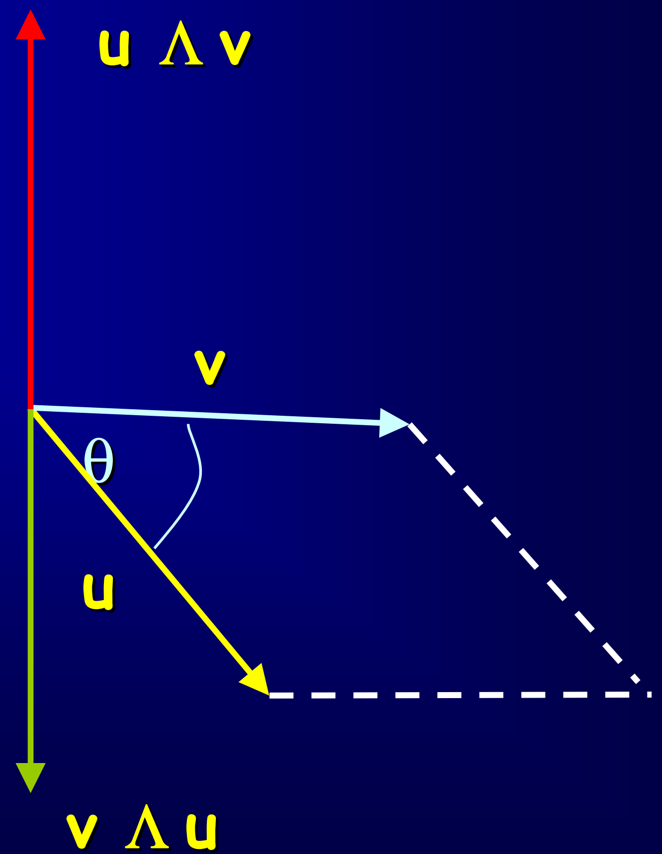
PRODOTTI

Prodotto *vettoriale* o *esterno* di due vettori

Ne segue che il prodotto vettoriale non è commutativo,

ma *anticommutativo*:

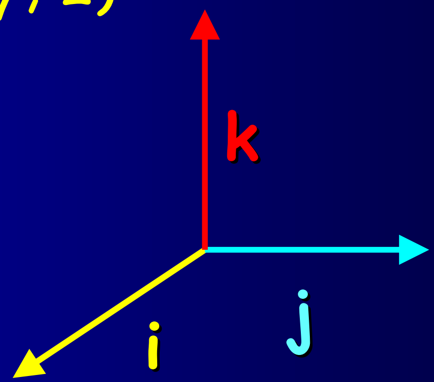
$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = - \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$



PRODOTTI

Prodotto *vettoriale* tra i versori principali **i j k**

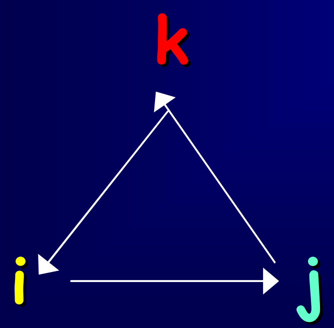
(vettori di modulo unitario lungo x, y, z)



$\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k}$ $\qquad$ $\mathbf{j} \wedge \mathbf{i} = -\mathbf{k}$

$\mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{i}$ $\qquad$ $\mathbf{k} \wedge \mathbf{j} = -\mathbf{i}$

$\mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j}$ $\qquad$ $\mathbf{i} \wedge \mathbf{k} = -\mathbf{j}$



Procedendo nel verso delle frecce, "un vertice per il successivo" dà per prodotto "il terzo vertice", mentre nel verso contrario alle frecce otteniamo "l'opposto del terzo vertice"

PRODOTTI

Prodotto *vettoriale*

Attraverso il prodotto esterno possiamo dare una

Condizione di ***parallelismo*** tra due vettori:

Due vettori non nulli sono paralleli se e solo se

Il loro prodotto vettoriale è nullo.

PRODOTTI

Prodotto *vettoriale*

Due vettori non nulli sono paralleli se e solo se

Il loro prodotto vettoriale è nullo.

$\theta = 180°$

$\theta = 0$

Infatti due vettori paralleli (*stessa direzione*) formano un angolo θ di 0° (verso concorde) o di 180° (verso discorde):

In entrambe i casi sen $\theta = 0$; quindi il prodotto esterno è nullo in conseguenza del suo modulo nullo

$(|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \operatorname{sen} \theta)$

PRODOTTI

Prodotto *vettoriale in rappresentzione analitica*

Il prodotto esterno di due vettori di date coordinate:

$V = (x_1; y_1; z_1)$; $U = (x_2; y_2; z_2)$

si calcola esprimendoli come combinazione lineare dei versori principali **i**, **j**, **k** e applicando la proprietà distributiva

(rammentando i prodotti esterni tra i versori – vedi dia n° 40):

$$V \Lambda \mathbf{U} = (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1k) \Lambda (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2k) =$$

$$(y_1z_2 - y_2z_1)\,\mathbf{i} + (z_1x_2 - z_2x_1)\,\mathbf{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\,\mathbf{k}$$

Es.: $V = (1; -1; 4)$; $U = (2; 0; -3)$

$$V \Lambda \mathbf{U} = [(-1)*(-3) - 0*4]\,\mathbf{i} + [4*2 - (-3)*1]\,\mathbf{j} + [1*0-2*(-1)]\,\mathbf{k} =$$

$$= \mathbf{3}\ \mathbf{i} + \mathbf{11j} + \mathbf{2k}$$

PRODOTTI

Prodotto *vettoriale*

Un metodo equivalente è il calcolo del *determinante:*

$$V \Lambda U = \begin{bmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}$$

(Vedi più avanti il capitolo “Matrici e determinanti”)

PRODOTTI

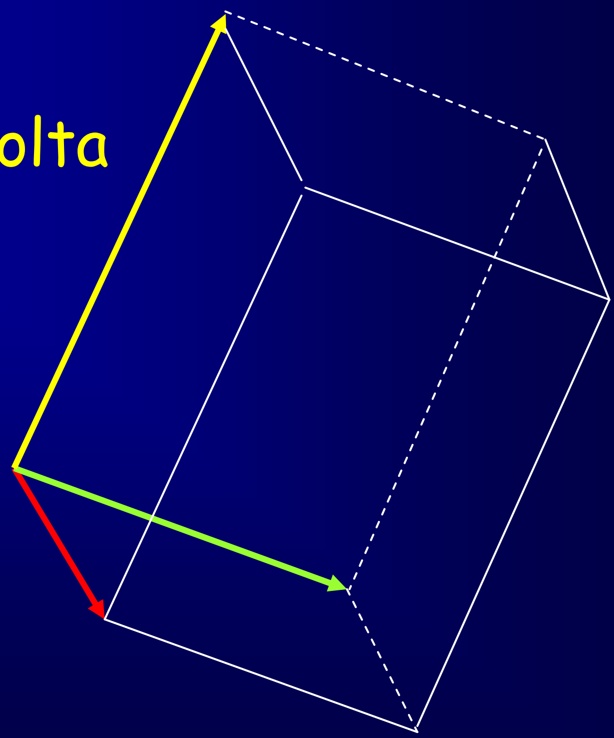
Prodotto *misto*

Implica *tre vettori* (ad. es. **u**, **v**, **w**) e si indica con la scrittura: **(u Λv)w**

ed è un *numero (scalare)* :

il prodotto vettoriale di **u** e **v** è a sua volta moltiplicato scalarmente per **w**.

Geometricamente ha il significato del ***Volume*** del parallelepipedo che ha i tre vettori come spigoli



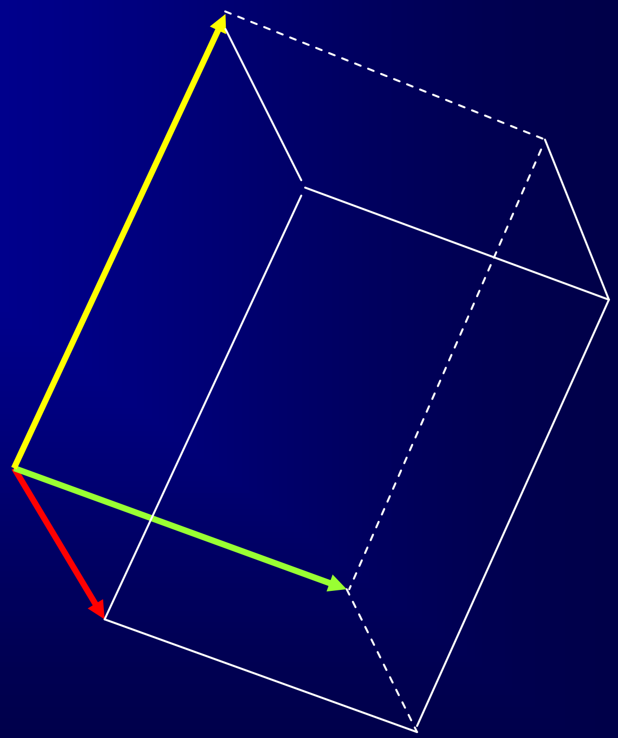
PRODOTTI

Prodotto *misto*

Il prodotto misto dà un criterio di

Complanarità di tre vettori:

Tre vettori non nulli sono complanari se e solo se il loro prodotto misto è nullo.



Combinazione lineare di vettori

Dati due o più vettori u_1, u_2, … u_n ,

se si moltiplica ciascuno di essi per un numero arbitrario (diverso da zero) e poi si sommano i vettori così ottenuti, si ottiene una *combinazione lineare* dei vettori dati.

Combinazione lineare di vettori

Quindi se:

$\mathbf{w} = c_1\mathbf{u_1} + c_2\mathbf{u_2} + \ldots + c_n\mathbf{u_n}$

(dove c_1, c_2,..., c_n sono numeri non tutti nulli)

diciamo che il vettore w è una combinazione lineare dei vettori $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, ... $\mathbf{u_n}$.

Es.: $\mathbf{u} = (2; 3; -5)$; $\mathbf{v} = (1; 0; 4)$

$$\mathbf{w} = 2\mathbf{u} + \mathbf{v} = (4; 6; -10) + (1; 0; 4) = (5; 6; -6)$$

w è una combinazione lineare dei vettori **u** e **v**.

Dipendenza lineare tra vettori

N vettori (due o più) ($\mathbf{u}_1$; $\mathbf{u}_2$; …; $\mathbf{u}_n$) si dicono *linearmente dipendenti*
se ciascuno di essi si può esprimere come combinazione lineare degli altri n-1 vettori.

Ciò equivale a dire che la combinazione lineare degli n vettori è nulla (uguale al vettore nullo) per valori dei coefficienti c_i non tutti nulli.

Dipendenza lineare tra vettori

Se ciascuno degli n vettori ($\mathbf{u}_1$; $\mathbf{u}_2$; …; $\mathbf{u}_n$) *non* si può esprimere come combinazione lineare degli altri, vale a dire che la combinazione lineare degli n vettori è nulla (uguale al vettore nullo) *solo* per valori dei coefficienti c_i tutti nulli,

allora gli n vettori si dicono

linearmente indipendenti

Dipendenza lineare tra vettori

In pratica:

1.- Due vettori *paralleli* sono l. dipendenti

2.- Due vettori *non* paralleli sono l. indipendenti.

3.- Tre vettori compalnari sono l. dipendenti

4.- Tre vettori non complanari sono l. indipendenti

Sistemi di base

Un insieme di n vettori linearmente indipendenti costituisce un *sistema di base* per lo spazio R^n.
Ciò significa che ogni vettore dello spazio può essere espresso come combinazione lineare degli n vettori l. indipendenti.

Sistemi di base

Un vettore qualsiasi **u** (non nullo) è sistema di base per lo spazio $\boldsymbol{R}^{1}$ (retta euclidea): ogni vettore **v** della retta si ottiene da u moltiplicandolo per un numero opportuno: **v** = cu.

Sistemi di base

Due vettori **u** e **v** non paralleli (e ovviamente complanari) costituiscono un sistema di base per lo spazio R^2 (piano euclideo): ogni vettore **w** del piano si ottiene come combinazione lineare di u e v:

$w = c_1 u + c_2 v$

L'esempio più noto è quello della coppia di versori **i** e **j.**

Ogni vettore **w** del piano si può scrivere come:

$w = xi + yj$, cioè come combinazione lineare di **i** e **j.**

Sistemi di base

Tre vettori **u**, **v**, **z** *non complanari* costituiscono un sistema di base per lo spazio R^3 (spazio tridimensionale euclideo): ogni vettore **w** dello spazio si ottiene come combinazione lineare di **u**, **v** e **z**:

$\mathbf{w} = c_1\mathbf{u} + c_2\,\mathbf{v} + c_3\mathbf{z}$

L'esempio più noto è quello della terna di versori **i** , **j** e **k**.

Ogni vettore **w** dello spazio trid. si può scrivere come:

$\mathbf{w} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}, + z\mathbf{k}$, cioè come combinazione lineare di **i** , **j** e **k**.

Sistemi di base

Ci sono quindi due modi per indicare un vettore in rappresentazione analitica:

1) Specificando la terna delle sue coordinate: **v** = (x:y;z)
2) Scrivendolo come combinazione lineare dei versori principali: **v** = x**i** + y**j**,+ z**k**,

Es.: **v = (-1; 5; 2)**

v = -**i** + 5**j**,+ 2**k**,

W = (0; 1; -6)

W = j - 6k

Il secondo modo è particolarmente utile per calcolare i prodotti scalare e vettoriale in rappresentazione analitica

Spazi euclidei

I vettori (in rappresentazione algebrica) costituiti da n-ple ordinate di *numeri reali* si dicono anche *vettori euclidei*

(o più completamente: *vettori dello spazio vettoriale lineare – SVL - euclideo)*

- l'insieme di tutti i numeri reali costituisce uno *spazio euclideo monodimensionale* (a una dimensione) *o retta euclidea* (***R*** ^{1})

-l'insieme di tutte le coppie ordinate di *numeri reali costituisce uno*
spazio euclideo bidimensionale (a due dimensioni) *o piano euclideo (**R*** ^{2} *)*

-l'insieme di tutte le terne ordinate di *numeri reali costituisce uno spazio euclideo tridimensionale* (a tre dimensioni)

-*Ecc. per n>3*

Euclide di Alessandria

(325 – 265 a.C.)

Spazi hermitiani

I vettori (in rappresentazione algebrica) costituiti da n-ple ordinate di *numeri complessi z* (del *tipo* *z= a + ib, dove i =* √-1) si dicono anche *vettori hermitiani:*

- l'insieme di tutti i *numeri complessi* costituisce uno *spazio hermitiano monodimensionale* o *retta hermitiana* (*C* ^{1})

-*l'insieme di tutte le coppie ordinate di numeri complessi* (z_1; z_2) *costituisce uno* spazio *hermitiano bidimensionale* o *piano hermitiano* (*C* ^{2})

l'nsieme di tutte le *terne ordinate* di numeri complessi (z_1; z_2; z_3) costituisce uno *spazio hermitiano tridimensionale* (*C* ^{3})

- *Ecc. per qualsiasi dimensione n*

Charles Hermite

(1822-1901)

Vi sono poi spazi vettoriali costituiti da enti astratti che non sono necessariamente n-ple di numeri, ma per i quali si definiscono somma, differenza, prodotto scalare, modulo e distanza: ***spazi pre-hilbertiani***

Si generalizza poi il concetto di spazio vettoriale introducendo vettori a infinite dimensioni, con determinate proprietà che implicando i concetti di limite

di una successione, ecc.:

Spazi hilbertiani, spazi di

Banach, ecc.

David Hilbert
(1862 – 1943)

Stefan Banach
(1892 – 1945)

VETTORI VARIABILI

Nelle scienze sperimentali si tratta principalmente (fenomeni dinamici) con grandezze vettoriali (ad es. forze o velocità) variabili nel tempo o nello spazio: esse sono matematicamente rappresentate da vettori variabili, cioè le cui coordinate non sono numeri (o parametri letterali costanti), ma variabili in dipendenza da uno o più parametri.

Ad es., le coordinate di un vettore (e quindi, geometricamente, direzione, modulo e verso) possono variare con il tempo: esse sono quindi espresse da *funzioni* della variabile indipendente tempo (t).

Il vettore stesso è quindi una *funzione di t* (si chiamerà, più propriamente, funzione-vettore (o funzione vettoriale), in contrapposizione alle funzioni, già viste in Analisi (come f(x), o f(x;y;z)) che, per dati valori assegnati alle variabili indipendenti, assumono valori numerici, dette anche perciò *funzioni scalari.*

VETTORI VARIABILI

Esprimeremo un vettore **u** dipendente, ad es., da una variabile t con la scrittura:

$\mathbf{u}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$

Es.: 1) $\mathbf{u}(t) = t\mathbf{i} -(2t+1)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$

oppure: 2) $\mathbf{v}(t) = -\mathbf{i} + \ln(t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

Nel primo caso tutte e tre le coordinate sono variabili in funzione di t; in termini più sintetici potremmo scrivere il vettore come: $\mathbf{u}(t) = (t; -(2t+1); 2t)$,. Ad es., per t =2 otterremo: $\mathbf{u}(2) = 2\mathbf{i} -5\mathbf{j} + 4\mathbf{k} = (2; -5; 4)$.

Nel secondo caso, invece, solo la seconda coordinata è funzione di t.

DERIVATA di un VETTORE

Se il vettore è funzione di una variabile (ad es. t), allora possiamo calcolare le **derivate** del vettore:

$$\mathbf{u}'(t) = \frac{du(t)}{dt} = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$$

dove con i simboli $x'(t)$ ecc. si denotano le derivate delle coordinate rispetto alla variabile t.
(notiamo che i versori **i**, **j**, **k** vanno trattati come costanti moltiplicative).

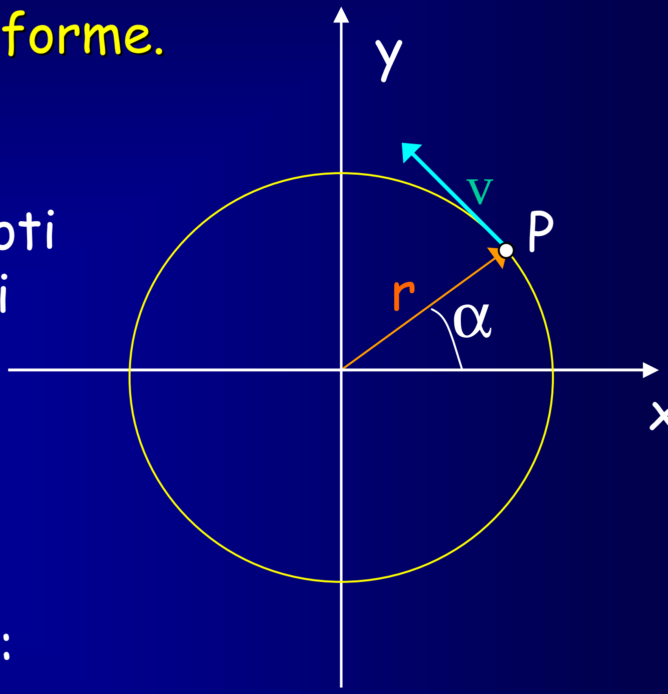
Es.: $\mathbf{u}(t) = t\mathbf{i} - (2t+1)\mathbf{j} + 2t^3\mathbf{k}$

derivata: $\mathbf{u}'(t) = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6t^2\mathbf{k}$

derivata seconda: $\mathbf{u}''(t) = 6\mathbf{k}$
(le derivate dei primi due termini sono nulle in quanto derivate di costanti)

DERIVATA di un VETTORE

Un esempio in fisica: moto circolare uniforme.



Consideriamo un punto materiale P che ruoti uniformemente sulla circonferenza (angoli uguali in tempi uguali).

L'angolo percorso nell'unità di tempo si chiama *velocità angolare* (ω).

L'angolo α percorso nel tempo t è dato da:

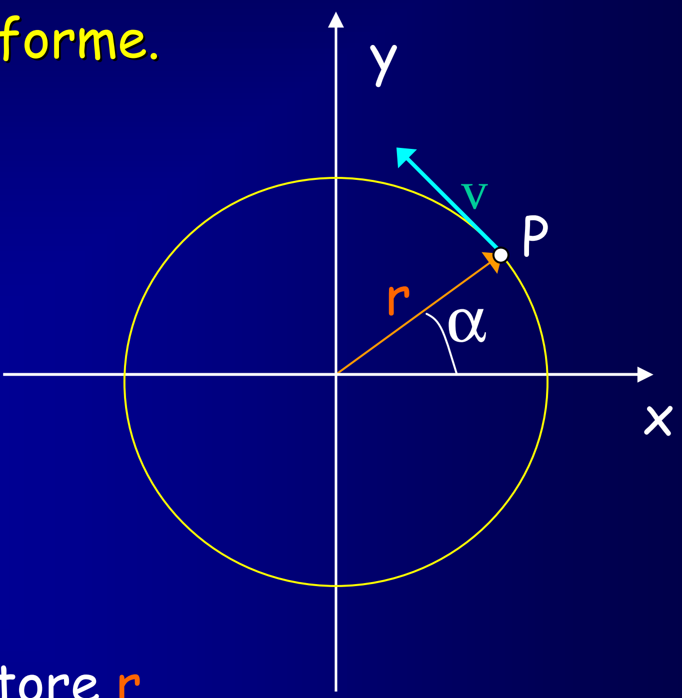
$\alpha = \omega t$.

La posizione del punto P all'istante t è data dal raggio-vettore (funzione-vettore) **r (x;y),** di coordinate:

$x= r \cos(\alpha)= r \cos(\omega t)$; $y= r \operatorname{sen}(\alpha)= r \operatorname{sen}(\omega t)$;

DERIVATA di un VETTORE

Un esempio in fisica: moto circolare uniforme.



Il raggio-vettore **r** (funzione del tempo, perché ha modulo costante, ma direzione variabile – analogamente alla velocità **v**) è quindi espresso da:

$$\mathbf{r} = r\cos(\omega t)\mathbf{i} + r\,\mathrm{sen}(\omega t)\mathbf{j}$$

Il vettore velocità **v** è la derivata del vettore **r** rispetto al tempo:

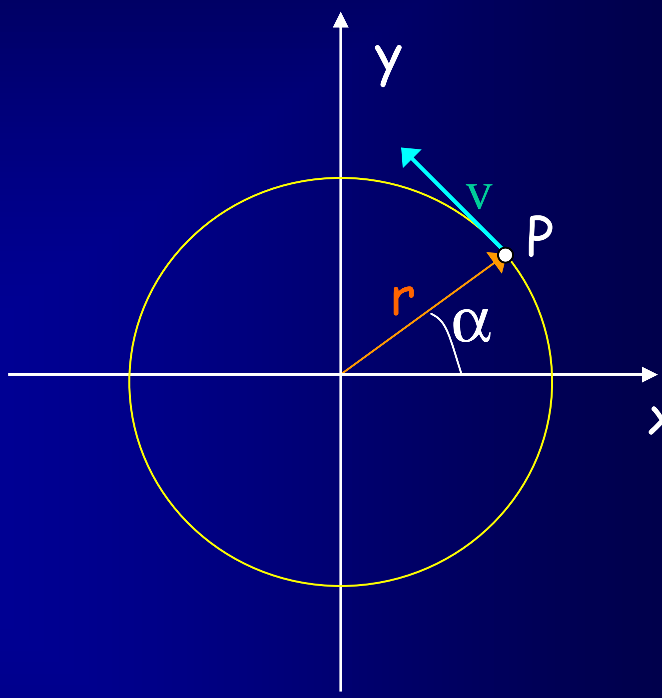
$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} = -r\,\omega\,\mathrm{sen}(\omega t)\mathbf{i} + r\,\omega\cos(\omega t)\mathbf{j}$$

DERIVATA di un VETTORE

Calcolando il prodotto scalare r v

(somma dei prodotti delle coordinate corrispondenti) si trova che esso è nullo per ogni valore di t e quindi che i vettori r e v sono in ogni istante *perpendicolari* tra loro:

il vettore velocità è quindi sempre tangente alla circonferenza nel punto P.



Analogamente, calcolando il vettore *accelerazione* , come derivata della velocitò, si trova che è perpendicolare a **v** e quindi parallela ad r, ma di *verso opposto* (accelerazione centripeta).

DERIVATA di una FUNZIONE-VETTORE

Più in generale, le coordinate di una funzione-vettore possono dipendere da più variabili indipendenti (ad. es. le tre coordinate spaziali x, y, z: pensiamo ad. es alle coordinate dei vettori campo elettrico (**E**) o magnetico (**H** o **B**) variabili.

In tal caso avremo a che fare con una funzione-vettore del tipo:

$$\mathbf{F}(x;y;z) = X(x;y;z)\mathbf{i} + Y(x;y;z)\mathbf{j} + Z(x;y;z)\mathbf{k}$$

dove X, Y, Z non sono coordinate spaziali (come x, y, z), ma coordinate del vettore **F**, a loro volta funzioni di x,y, e z.

Si potranno allora calcolare le derivate parziali di **F** rispetto a ciascuna delle coordinate indipendenti x,y,z

DERIVATA di una FUNZIONE-VETTORE

Esempio:

Sia data la funzione-vettore:

F $(x;y;z) = (x^2y+z^3)\mathbf{i} + 2z\mathbf{j} - (xyz)\,\mathbf{k}$

$$\frac{\partial F}{dx} = (2xy)\mathbf{i} - (yz)\,\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial F}{dy} = (x^2)\mathbf{i} - (xz)\,\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial F}{dz} = (3z^2)\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - (xy)\,\mathbf{k}$$

Matrici

(Tabelle di elementi disposti su m righe e n colonne)

Di particolare interesse le matrici *quadrate* (m=n):

Es. (m=n=3):

$$V = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Matrici

Un vettore a n componenti (coordinate), cioè appartenente allo spazio $\mathbf{R}^n$, si può rappresentare come una matrice a n righe e una colonna (detta anche *vettore colonna*)

Es.: il vettore **u** = (3; -2; 1) come:

$$u = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrici come operatori

Come si applica una matrice a un vettore?

Ad es.: una matrice quadrata 3x3 (di terz'ordine) applicata a un vettore **u** di $\mathbf{R}^3$, lo trasforma in un vettore **v** ancora di $\mathbf{R}^3$.

$$A\,\mathbf{u} = \mathbf{v}$$

Matrici come operatori

Come si applica una matrice a un vettore?

$$\mathbf{A\ u = v}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Matrici come operatori

Come si applica una matrice a un vettore?

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Mediante il prodotto matriciale righe x colonne:

Il primo elemento, x_2, del vettore trasformato si ottiene moltiplicando la prima riga della matrice per il vettore colonna (x_1, y_1, z_1), come somma dei prodotti degli elementi omologhi:

$$x_2 = a_{11}\, x_1 + a_{12}\, y_1 + a_{13}\, z_1$$

Matrici come operatori

Come si applica una matrice a un vettore?

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Il secondo elemento, y_2, del vettore trasformato si ottiene moltiplicando la seconda riga della matrice per il vettore colonna (x_1, y_1, z_1):

$$y_2 = a_{21}\, x_1 + a_{22}\, y_1 + a_{23}\, z_1$$

Matrici come operatori

Come si applica una matrice a un vettore?

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Il **terzo elemento, z_2,** del vettore trasformato si ottiene moltiplicando la terza riga della matrice per il vettore colonna (x_1, y_1, z_1):

$$z_2 = a_{31}\, x_1 + a_{32}\, y_1 + a_{33}\, z_1$$

Matrici come operatori

Come si applica una matrice a un vettore?

Es.1:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 21 \end{bmatrix}$$

$1 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 = -1; \qquad 5 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 21$

Matrici come operatori

Come si applica una matrice a un vettore?

Es.2:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + (-2) \cdot (-4) = 10;$

$0 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 1 \cdot (-4) = 1$

$1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + (-3) \cdot (-4) = 17$

Equazioni vettoriali e sistemi lineari

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{c}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

Quest'*equazione vettoriale* (l'incognita è il vettore **x**, cioè le sue componenti x_1, x_2, x_3) equivale a porre in forma matematica il problema: " Data la matrice A e il vettore **c**, qual è il vettore **x** tale che applicando A ad **x** si ottenga **c**? "

Equazioni vettoriali e sistemi lineari

$$\mathbf{A\ x = c}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

Applicando il prodotto righe per colonne si ottiene:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3 \end{cases}$$

Equazioni vettoriali e sistemi lineari

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3 \end{cases}$$

L'equazione vettoriale $Ax = c$ è quindi equivalente a un *sistema di equazioni lineari* (= di primo grado), o semplicemente *sistema lineare* nelle incognite x_1, x_2, x_3 (in questo caso il sistema è "quadrato" 3x3)

Equazioni vettoriali e sistemi lineari

Un sistema lineare può avere:

a) Un'*unica soluzione* (terna ordinata di valori x_1^*, x_2^*, x_3^*, vale a dire un vettore $\mathbf{x}^* = (x_1^*; x_2^*; x_3^*)$)

b) Infinite soluzioni

c) Nessuna soluzione

Equazioni vettoriali e sistemi lineari

Matrici e determinanti

Per *matrice del sistema* (A) si intende la matrice formata dai coefficienti delle incognite.

Nel caso esemplificato, A è:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Equazioni vettoriali e sistemi lineari

Il *determinante* *di una matrice quadrata* - det(A) - è un *numero* (vedi regole per il calcolo di un determinante).

Lavori sui determinanti apparvero già nella seconda metà del sec XVIII ad opera di: E. Bézout (1730-1783), A.T. Vandermonde (1735-1796), e proseguirono nel secolo successivo soprattutto ad opera di:

Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

Joseph-Louis Lagrange (1749-1827)

Determinante di una matrice *quadrata*

Il *determinante* *di una matrice quadrata A*

si scrive det(A) o anche D_A, oppure con due barre verticali ai lati della tabella-matrice

$$\text{Det}(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Esso è un numero reale (positivo, negativo o nullo)

Regole per il calcolo di un determinante

Esiste un teorema dal quale discende un metodo generale per il calcolo dei determinanti di matrici quadrate di qualsiasi ordine.

Ci limitiamo qui a dare regole pratiche per calcolare i determinanti fino al 3°ordine.

1) Il *determinante di una matrice quadrata* di 1°ordine (un solo elemento a_{11}) coincide con l'elemento stesso.

2) Il *determinante di una matrice quadrata* di 2°ordine

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

è uguale a: $Det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

[diagonale principale ( ) meno

diagonale secondaria ( )]

Es.:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad Det(A) = (-3)*2 - 5*2 = -16$$

Regole per il calcolo di un determinante

3) Il *determinante di una matrice quadrata* di 3°ordine

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

si può calcolare con la regola di Sarrus.

Regole per il calcolo di un determinante

Regola di Sarrus (<u>solo</u> per matrici di 3° ordine)

Si aggiungano a destra le prime due colonne:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Si possono così considerare

tre diagonali principali ( )

e tre diagonali secondarie ( )

Regole per il calcolo di un determinante

Regola di Sarrus (<u>solo</u> per matrici di 3° ordine)

Si aggiungano a destra le prime due colonne:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Si calcolano i prodotti degli elementi di ogni diagonale principale e si sommano. Sia DP il risultato:

$DP = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32})$

Regole per il calcolo di un determinante

Regola di Sarrus (solo per matrici di 3° ordine)

Si aggiungano a destra le prime due colonne:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Si calcolano ora i prodotti degli elementi di ogni diagonale secondaria e si sommano. Sia DS il risultato:

$DS = (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$

Regole per il calcolo di un determinante

Regola di Sarrus (<u>solo</u> per matrici di 3° ordine)

Si aggiungano a destra le prime due colonne:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

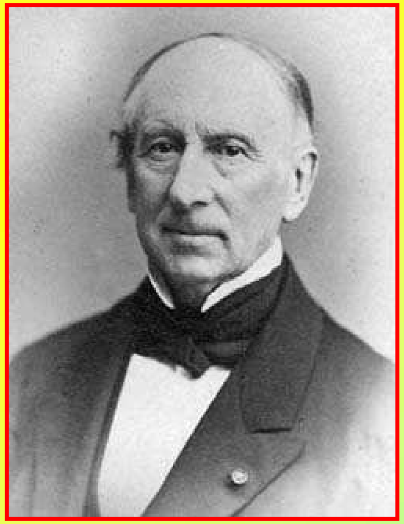
Il determinanate della matrice data risulta:

Det(A) = DP - DS

Equazioni vettoriali e sistemi lineari

Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Augustin Louis Cauchy (1789-1857)



Carl Gustav Jacobi (1804-1851)

Equazioni vettoriali e sistemi lineari

Eugène Rouché

(Francia, 1832-1910)

Alfredo CAPELLI

(Milano, 1855-1910)

Tra i loro numerosi lavori, il Teorema che prende il loro nome, sulle soluzioni dei sistemi algebrici lineari

(qui non riportato)

Equazioni vettoriali e sistemi lineari

Per i *sistemi quadrati* vale il

TEOREMA DI CRAMER:

Gabriel Cramer (1704 – 1752)

Ip.: $\det(A) \neq 0$

$\Updownarrow$

Th.: Il sistema ammette una ed una sola soluzione (un vettore, cioè una successione ordinata di numeri)

Equazioni vettoriali e sistemi lineari

Il teorema di Cramer recita:

"*Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema quadrato ammetta un'unica soluzione è che il determinante del sistema sia diverso da zero*"

Se invece il *determinante è uguale a zero* il sistema ammette infinite soluzioni oppure nessuna (sistema incompatibile)

In questo caso si ricorre al **Teorema di Rouché-Cappelli** (teorema generale, valido per qualunque sistema lineare, qui non trattato).

Equazioni vettoriali e sistemi lineari

Se il sistema quadrato è *omogeneo* (tutti i termini noti c_1, c_2, c_3 nulli):

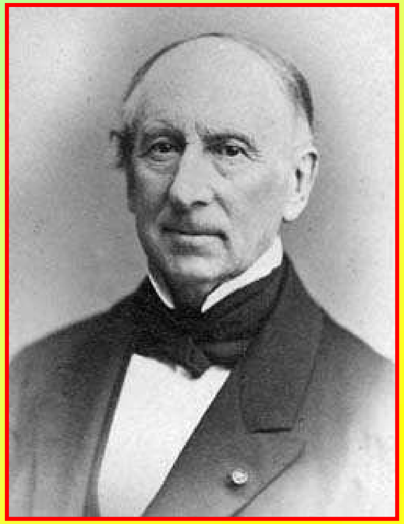
[Si ricorda che ogni sistema omogeneo ammette sempre almeno la *soluzione banale* o *nulla* (0; 0; 0)]

1.- Se il sistema omogeneo è di Cramer ($\det(A) \neq 0$) allora esso ammette solo la soluzione banale.

2.- Se il sistema omogeneo non è di Cramer ($\det(A)=0$), allora il sistema ammette infinite soluzioni (quella banale e altre infinite non banali)

Equazione omotetica o agli autovalori

Jean
D'Alembert
(1717-1783)



Augustin Louis
Cauchy
(1789-1857)

Jacques Charles
François Sturm
(1803-1855)

Carl Gustav
Jacobi
(1804-1851)

Equazione omotetica o agli autovalori

Appilcando una matrice quadrata di ordine n a tutti i vettori dello spezio $\boldsymbol{R}^{n}$, ogni vettore verrà, in generale, trasformato in un altro vettore dello stesso spazio.

Ad es., una matrice 3x3 trasforma ogni vettore dello spazio $\boldsymbol{R}^3$ (euclideo tridimensionale) in un altro, generalemnte di diverso modulo e/o direzione e/o verso.

Questione: quali vettori (**x**), in seguito all'applicazione della matrice A conservano la direzione? (e quindi mutano eventualmente solo di modulo e/o verso?)

Equazione omotetica o agli autovalori

Se un vettore **x** dopo la trasformazione $\mathbf{x} \rightarrow A\mathbf{x}$ ha la stessa direzione che aveva prima della trasformazione, cioè $A\mathbf{x} \,||\, \mathbf{x}$, significa che **Ax e x** hanno coordinate proporzionali, cioè che possiamo scrivere:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \qquad (1)$$

Dove λ è il coefficiente di proporzionalità.

La questione posta è quindi rappresentata dall'*equazione vettoriale* (1). Il vettore **x** è l'incognita

Equazione omotetica o agli autovalori

Tale equazione si dice ***equazione omotetica***

o

Equazione agli autovalori

Le sue soluzioni non nulle, cioè i vettori non nulli che in seguito all'applicazione della matrice quadrata *A* conservano la direzione, si chiamano **autovettori** di *A*

Sotto quali condizioni esistono gli autovettori di una matrice quadrata e come si calcolano?

Equazione omotetica o agli autovalori

L'equazione (1), con semplici trasformazioni, si può scrivere nella forma equivalente:

$$(A - \lambda I)\, x = 0 \qquad (2)$$

Al secondo membro compare il vettore nullo.

Al primo membro compare la matrice $(A - \lambda I)$ applicata al vettore incognito **x** (dove I è la matrice identità: elementi diagonali uguali a 1 e tutti gli altri uguali a zero).

Essa si chiama ***matrice secolare***

Equazione omotetica o agli autovalori

L'equazione (2) è equivalente a un ***sistema omogeneo*** di equazioni lineari.

Nell'esempio di matrice 3x3 che opera sui vettori dello spazio euclideo tridimensionale):

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

Equazione omotetica o agli autovalori

Ogni ***sistema omogeneo*** ammette sempre la *soluzione nulla* (o *banale*), cioè il vettore (0; 0; 0).

Se il sistema (quadrato) è di Cramer,

cioè Det $(A - \lambda I) \neq 0$, ammetterà solo la soluzione nulla (che , per definizione non è un autovettore).

Ciò dipende dai valori del parametro λ

Affinchè il sistema, vale a dire l'equazione (2), ammetta soluzioni non nulle, cioè *autovettori*, è necessario e sufficiente che:

$$\text{Det}\,(A - \lambda I) = 0$$

Equazione omotetica o agli autovalori

$$\text{Det}\,(A - \lambda I) = 0$$

Questa equazione (detta *equazione caratteristica*) è un'equazione algebrica intera di grado n (uguale all'ordine della matrice).

Vi saranno quindi almeno un valore (in generale complesso) di λ e al massimo n, che rendono nullo il determinante secolare.

Per tali valori di λ (soluzioni dell'equazione caratteristica), detti ***autovalori*** della matrice A, e *solo per essi*, il sistema ammetterà soluzioni non banali, cioè *autovettori*.

Equazione omotetica o agli autovalori

Come calcolare gli Autovettori?

1.- Si risolve l'equazione caratteristica (3)

2.- Si sostituisce a λ di volta in volta un autovalore: per ogni autovalore di λ otteremo un sistema quadrato omogeneo non di Cramer.

3.- Si trovano le soluzioni non nulle di tale sistema: la (o le) n-pla di valori trovata (-e) rappresenta le coordinate dell'autovettore corrispondente all'autovalore sostituito.

Se $\mathbf{x}_1$ è un autovettore (ad es. corrispondente all'autovalore $\lambda_{1)}$, è tale anche ogni altro vettore ad esso proporzionale,

$c\mathbf{x}_1$, poiché il sistema è omogeneo.

Equazione omotetica o agli autovalori

Esempio:

Sia data la matrice quadrata 2x2

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

La matrice secolare è: $$(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} (2-\lambda) & 0 \\ 1 & (-1-\lambda) \end{vmatrix}$$

L'equazione omotetica è: $(A-\lambda I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$

Equazione omotetica o agli autovalori

Tale equazione omotetica è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + 0x_2 = 0 \\ x_1 + (-1-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

Si ha l'equazione secolare:

Det $(A - \lambda I) = (2-\lambda)(-1-\lambda)=0$

Le cui soluzioni sono:

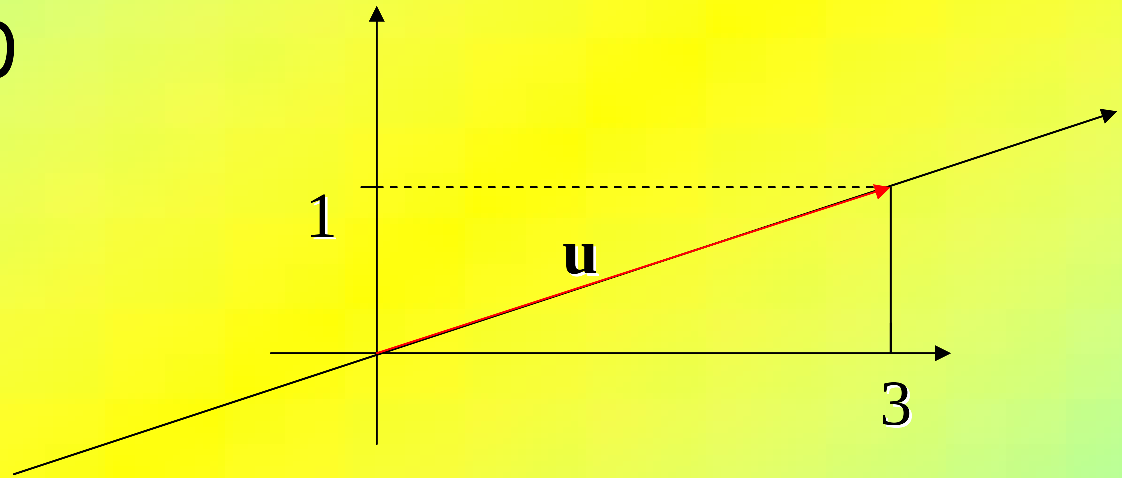
$\lambda_1 = 2$ (primo autovalore); $\lambda_2 = -1$ (secondo autovalore);

Equazione omotetica o agli autovalori

Sostituendo il primo autovalore (2) a λ nel sistema si ha:

$$0\ x_1 + 0\ x_2 = 0$$

$$x_1 \quad - 3x_2 = 0$$



Le cui soluzioni sono:

$x_1 \quad = 3x_2 \qquad (3)$

Ciò significa che se assegniamo a una incognita (ad es. x_2) un valore arbitrario, l'altra assume il valore dato dalla (3); per x_2=1, x_1=3.

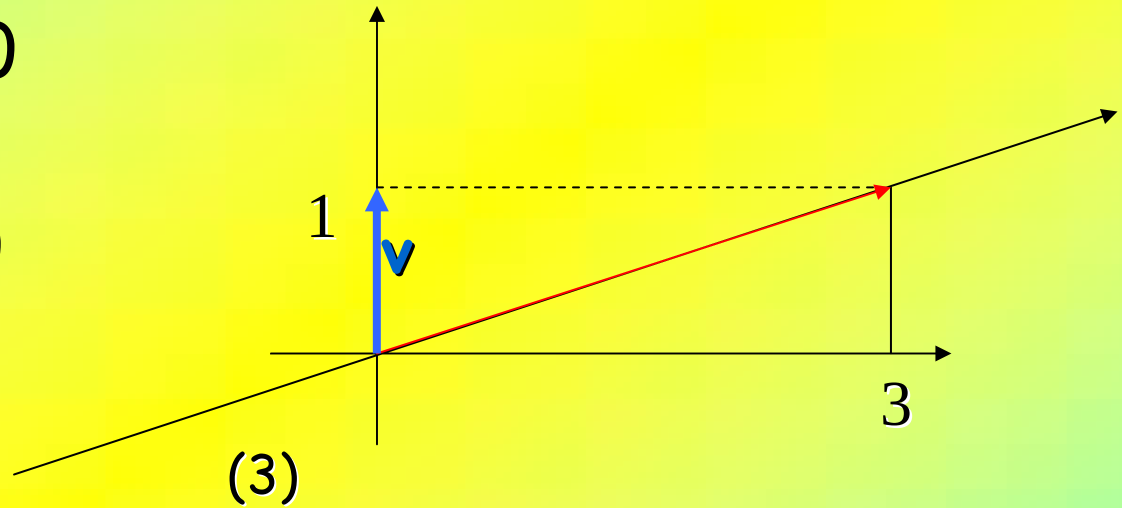
Quindi, ad es. il vettore **u** = (3;1) è un *autovettore* corrispondente all'autovalore 2.
Sono quindi autovettori anche tutti i vettori c(3;1), con c numero arbitrario diverso da zero (cioè tutti i vettori sulla stessa retta del vettore **u** = (3;1)

efo1

Equazione omotetica o agli autovalori

Sostituendo il secondo autovalore (-1) a λ nel sistema si ha:

$$\begin{cases} 3\,x_1 + 0\,x_2 = 0 \\ x_1 \quad + 0\,x_2 = 0 \end{cases}$$



Le cui soluzioni sono:

$x_1 \;= 0;\;\; x_2 = x_2$ (3)

Ciò significa che x_2 può assumere qualsiasi valore arbitrario,

Quindi, ad es. il vettore **V** = (0;1) è un *autovettore* corrispondente all'autovalore -1.

Sono quindi autovettori anche tutti i vettori C(0;1), con c numero arbitrario diverso da zero.

Diapositiva 115

---

efo1 Admin; 09/01/2012

Equazione omotetica o agli autovalori

L'equazione agli autovalori è di grande importanza per impostare e risolvere problematiche in vari campi di diverse discipline, ad es.:

- *Analisi matematica* (metodi di risoluzione di sistemi lineari di equazioni differenziali)
- *Elettrotecnica* (circuiti elettrici)
- *Quantomeccanica* (orbitali atomici e molecolari)
- *Statistica* (analisi fattoriale, delle componenti principali, ecc.)

OPERATORI

In fisica, riguardo alcune funzioni vettoriali, emergono importanti concetti matematici, quali

Gradiente, Divergenza e Rotore

considerati come *operatori*, che si applicano a funzioni (scalari o vettoriali, in dipendenza dal tipo di operatore).

OPERATORI

Un *operatore* può essere considerato come un dispositivo matematico, una "macchina astratta" , con un ingresso e un'uscita.

Entra un oggetto matematico A ed esce un altro oggetto B, trasformato dall'operatore.

$$A \longrightarrow \boxed{\text{Operatore}} \longrightarrow B$$

Esempio 1: Operatore di moltiplicazione per 3

$$n \longrightarrow \boxed{\text{Moltiplicatore x 3}} \longrightarrow 3n$$

(**n** può essere un numero, un vettore, una funzione, ecc.)

Esempio 2: Operatore di derivazione

$$\underset{\text{(funzione)}}{\mathbf{f(x)}} \longrightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial\ x}} \longrightarrow \underset{\text{(derivata)}}{\mathbf{f'(x)}}$$

OPERATORI

Consideriamo il seguente vettore "simbolico" ∇ , detto "*nabla*":

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

Esso è un vettore simbolico perché le sue componenti non sono numeri o funzioni scalari, ma gli operatori di derivata parziale

OPERATORI

GRADIENTE

Se applichiamo l'operatore nabla ad una funzione scalare (prodotto di un vettore per uno scalare) a tre variabili indipendenti *f(x,y;z),* otteniamo un vettore le cui componenti sono le derivate parziali della funzione *f* considerata:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} = \mathbf{grad}\ f$$

Tale funzione vettore si chiama *gradiente* della funzione scalare f(x;y;z)

L'operatore nabla è stato quindi applicato a una funzione scalare trasformandola in una funzione vettoriale.

OPERATORI

GRADIENTE

Esempi:

1) Data la funzione $f(x;y;z) = 2xy^3z + 3\ln(xy) - z$:

grad f = $(2y^3z+3/x)\mathbf{i} + (6xy^2z+3/y)\mathbf{j} + (2xy^3-1)\mathbf{k}$

---

2) Data la funzione: $f(x) = 4x^2+2x-1$:

grad f = $(8x+2)\mathbf{i}$

---

3) Data la funzione vettoriale

$\mathbf{f}(x;y;z)= (2xy)\mathbf{i}+(5)\mathbf{j}-(xz)\mathbf{k}$

grad f **non esiste** (non ha significato, perché **f** non è una funzione scalare)

OPERATORI

DIVERGENZA

Consideriamo il prodotto scalare tra l'operatore nabla e una funzione vettoriale **F** (x;y;z),

dove **F** = F_1**i** + F_2**j** + F_3**k** (F_1, F_2, F_3, le componenti della funzione vettriale **F**,. sono a loro volta funzioni scalari di x, y e z.

Si verifica facilmente che:

$$\nabla \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \mathrm{div}\ \mathbf{F}$$

Abbiamo ottenuto la *divergenza* della funzione vettoriale **F**.

L'operatore nabla, applicato ad una funzione vettoriale mediante il prodotto scalare, ha restituito una funzione scalare.

OPERATORI

DIVERGENZA

Esempi:

div **F** = $yz+3x^2y^2z^4+2$

- Data la funzione F= $(xyz)\mathbf{i} + (x^2y^3z^4)\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$:

2) Data la funzione F= $(x)\mathbf{i} + (y)\mathbf{j} + (z)\mathbf{k}$

div **F** = 3

3) Data la funzione F= xy^2z

div F **non esiste** (non ha significato perché F non è una funzione vettoriale ma scalare)

OPERATORI

ROTORE

Consideriamo il prodotto vettoriale tra l'operatore nabla e una funzione vettoriale **F** (x;y;z),

dove **F** = F_x**i** + F_y**j** + F_z**k** (F_x, F_y, $F_{z,}$ le componenti della funzione vettriale **F**,. sono a loro volta funzioni scalari di x, y e z. Si verifica facilmente che:

^

$$\nabla \wedge \mathbf{F} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) =$$

$$= \mathbf{rot\ F}$$

Abbiamo ottenuto il *rotore* della funzione vettoriale **F**.

L'operatore nabla, applicato ad una funzione vettoriale mediante il prodotto vettoriale, ha restituito una funzione vettoriale.

OPERATORI

ROTORE

Esempi:

1) Data la funzione vettore **F**= $(xyz)\mathbf{i} + (x^2y^3z^4)\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$:

   rot F = $(-4x^2y^3z^3)\mathbf{i} + (xy)\mathbf{j} + (2xy3z4-xz)\mathbf{k}$

2) Data la funzione vettore **F** = $(x+y+z)\mathbf{i}$

   rot F = j + k

3) Data la funzione scalare F = $x+y+z$:

   rot F **non esiste** (rotore provo di significato perché F non è vettoriale)

G. Balla: *Numeri innamorati*