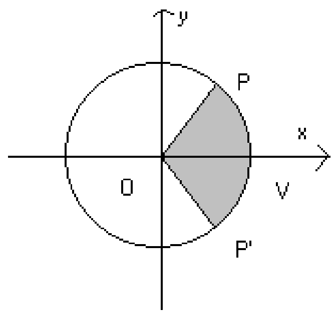
1. Le funzioni iperboliche



Dato nel piano cartesiano ***xOy*** il grafico della circonferenza centrata nell'origine e di raggio unitario $x^2+y^2=1$, detto **V** il suo punto di intersezione con il semiasse positivo delle ascisse e **P(x;y)** un suo punto qualunque, le coordinate ***x*** e ***y*** di **P** sono funzioni dell'angolo α=VOP e, se questo angolo è misurato in radianti, anche della lunghezza dell'arco **VP** la cui misura coincide numericamente con α.

Tali funzioni sono dette rispettivamente **coseno** e **seno *circolari***.

Si ha quindi

$$(1.1)\quad \begin{cases} x = \cos\alpha \\ y = \operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

e, per definizione,

$$(1.2)\quad \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Il rapporto tra seno e coseno è detto tangente

$$(1.3)\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

Se si indica con **P'** il simmetrico di **P** rispetto all'asse delle ascisse si ha che anche l'area del settore circolare **P'OP** coincide numericamente con α.
Si possono quindi pensare le funzioni seno e coseno come funzioni parametriche dell'area del settore circolare **P'OP**.

Va notato, riferendosi alla figura 1, che quanto più il punto **P** si avvicina a **V**, tanto più il settore circolare è assimilabile ad un triangolo isoscele di altezza **OV=1** e base **PP' = 2 sen α**.

In un triangolo il rapporto tra il doppio dell'area e la base è l'altezza.

Si potrà quindi dire che

$$(1.4)\quad \lim_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} = 1$$

La derivata rispetto a x di sen x è, per definizione,

$$(1.5) \quad D_x[\text{sen}\, x] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}(x+\Delta x) - \text{sen}\, x}{\Delta x}$$

per prostaferesi il numeratore è

$$(1.6) \quad 2\,\text{sen}\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

quindi

$$(1.7) \quad D_x[\text{sen}\, x] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$$

La derivata del coseno è, per definizione,

$$(1.8) \quad D_x[\cos x] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

per prostaferesi il numeratore è

$$(1.9) \quad -2\,\text{sen}\frac{\Delta x}{2}\,\text{sen}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

quindi

$$(1.10) \quad D_x[\cos x] = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\,\text{sen}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = -\,\text{sen}\, x$$

L'interpretazione di seno e coseno come funzioni parametriche dell'area di un settore circolare permette, per analogia, di introdurre una nuova famiglia di funzioni che, invece di esprimere parametricamente le coordinate punti della circonferenza di raggio 1, esprimono parametricamente le coordinate dei punti della iperbole equilatera di semiasse 1 e di equazione $\mathbf{x^2 - y^2 = 1}$

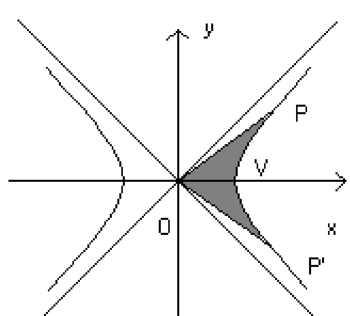


fig. 2

Indicando con α l'area del settore iperbolico **P'OP** si possono definire le coordinate di **P(x;y)** come funzioni di α

Tali funzioni, corrispondenti a quelle circolari, prendono il nome di **coseno e seno *iperbolici*.**

$$(1.11) \quad \begin{cases} x = \cosh \alpha \\ y = \operatorname{senh} \alpha \end{cases}$$

Per definizione

$$(1.12) \quad \cosh^2 \alpha - \operatorname{senh}^2 \alpha = 1$$

Si definisce inoltre la tangente iperbolica

$$(1.13) \quad \operatorname{tgh} \alpha = \frac{\operatorname{senh} \alpha}{\cosh \alpha}$$

Considerando positive le aree corrispondenti a un punto **P** del primo quadrante e negative quelle corrispondenti a un punto **P** nel secondo quadrante, l'insieme dei possibili valori di α è l'insieme dei reali $\mathbb{R}$, cioè il dominio delle tre funzioni iperboliche è $\mathbb{R}$

Risultano immediate le seguenti identità

$$(1.14) \quad \begin{cases} \cosh(-\alpha) = \cosh \alpha \\ \operatorname{senh}(-\alpha) = -\operatorname{senh} \alpha \\ \operatorname{tgh}(-\alpha) = -\operatorname{tgh} \alpha \end{cases}$$

cioè, come le analoghe funzioni circolari, il coseno iperbolico è pari, seno e tangente iperbolici sono dispari.

Sono immediate anche le seguenti uguaglianze

$$(1.15) \quad \begin{cases} \cosh 0 = 1 \\ \operatorname{senh} 0 = 0 \end{cases}$$

Il coseno iperbolico è crescente per x>0, decrescente per x<0, ha un minimo assoluto di valore 1 per x=0. La curva che lo descrive è una catenaria.

Il seno iperbolico è sempre crescente.

Poiché l'iperbole equilatera ammette gli asintoti |y| = x, seno e coseno iperbolici asintoticamente hanno lo stesso modulo e quindi la tangente iperbolica ammette gli asintoti orizzontali |y|=1.

Va notato, riferendosi alla figura 2, che quanto più il punto **P** si avvicina a **V**, tanto più il settore iperbolico è assimilabile ad un triangolo isoscele di altezza **OV** e base **PP' = 2 senh α.**

In un triangolo il rapporto tra il doppio dell'area e la base è l'altezza. Si potrà quindi dire che

$$(1.16) \quad \lim_{\alpha \to 0} \frac{\operatorname{senh} \alpha}{\alpha} = 1$$

2. La funzione esponenziale naturale

Se si sottopone la circonferenza trigonometrica $x^2+y^2=1$ ad una trasformazione

$$(2.1)\quad \begin{cases} X = x\cos\beta - y\,\mathrm{sen}\,\beta \\ Y = x\,\mathrm{sen}\,\beta + y\cos\beta \end{cases}$$

la circonferenza si trasforma in sè stessa.

Una trasformazione di questo tipo si dice **rotazione di ampiezza β.**

In particolare, se un punto ***A(cos α ; sen α)*** della circonferenza trigonometrica è sottoposto ad una rotazione di ampiezza β, si ottiene sulla circonferenza il punto ***S(cos(α+β) ; (sen α+β))***

$$(2.2)\quad \begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \mathrm{sen}\,\mathrm{sen}\,\beta \\ \mathrm{sen}(\alpha+\beta) = \cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta + \mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta \end{cases}$$

Queste relazioni forniscono le **formule di addizione per il coseno e per il seno circolari** e da esse si possono dedurre immediatamente numerose altre identità trigonometriche.

In modo del tutto analogo, se si sottopone l'iperbole equilatera unitaria $x^2-y^2=1$ alla trasformazione

$$(2.3)\quad \begin{cases} X = x\cosh\beta + y\,\mathrm{senh}\,\beta \\ Y = x\,\mathrm{senh}\,\beta + y\cosh\beta \end{cases}$$

l'iperbole si trasforma in sè stessa.

Tale trasformazione si dice **rotazione iperbolica di ampiezza β**

In particolare, se un punto ***A(cosh α ; senh α)*** della iperbole equilatera unitaria è sottoposto ad una rotazione iperbolica di ampiezza β, si ottiene sull'iperbole il punto ***S(cosh(α+β) ; sinh(α+β))***

$$(2.4)\quad \begin{cases} \cosh(\alpha+\beta) = \cosh\alpha\cosh\beta + \mathrm{senh}\,\alpha\,\mathrm{senh}\,\beta \\ \mathrm{senh}(\alpha+\beta) = \cosh\alpha\,\mathrm{senh}\,\beta + \mathrm{senh}\,\alpha\cosh\beta \end{cases}$$

Le identità (2.4) sono le **formule di addizione per il coseno e per il seno iperbolici.**

Da esse si possono dedurre immediatamente numerose altre identità tra funzioni iperboliche, come ad esempio, le formule di prostaferesi (notare somiglianze e diversità con le corrispondenti identità per le funzioni circolari)

$$(2.5)\quad \begin{cases} \operatorname{senh}\alpha+\operatorname{senh}\beta = 2\operatorname{senh}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cosh\dfrac{\alpha-\beta}{2} \\ \operatorname{senh}\alpha-\operatorname{senh}\beta = 2\cosh\dfrac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{senh}\dfrac{\alpha-\beta}{2} \\ \cosh\alpha+\cosh\beta = 2\cosh\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cosh\dfrac{\alpha-\beta}{2} \\ \cosh\alpha-\cosh\beta = 2\operatorname{senh}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{senh}\dfrac{\alpha-\beta}{2} \end{cases}$$

La derivata del seno iperbolico è, per definizione,

$$(2.6)\quad D_x[\operatorname{senh} x] = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\operatorname{senh}(x+\Delta x)-\operatorname{senh} x}{\Delta x}$$

Per prostaferesi il numeratore è

$$(2.7)\quad 2\operatorname{senh}\frac{\Delta x}{2}\cosh\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

quindi

$$(2.8)\quad D_x[\operatorname{senh} x] = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\operatorname{senh}\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cosh\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \cosh x$$

La derivata del coseno iperbolico è, per definizione,

$$(2.9)\quad D_x[\cosh x] = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cosh(x+\Delta x)-\cosh x}{\Delta x}$$

per prostaferesi il numeratore è

$$(2.10)\quad 2\operatorname{senh}\frac{\Delta x}{2}\operatorname{senh}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

quindi

$$(2.11)\quad D_x[\cosh x] = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\operatorname{senh}\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\operatorname{senh}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \operatorname{senh} x$$

Sommando membro a membro le formule di addizione (2.4) si ottiene

$$\cosh(\alpha+\beta)+\operatorname{senh}(\alpha+\beta) =$$

$$\cosh\alpha\cosh\beta+\operatorname{senh}\alpha\operatorname{senh}\beta+\cosh\alpha\operatorname{senh}\beta+\operatorname{senh}\alpha\cosh\beta=$$

$$\cosh\alpha(\cosh\beta+\operatorname{senh}\beta)+\operatorname{senh}\alpha(\cosh\beta+\operatorname{senh}\beta)=$$

$$(\cosh\alpha+\operatorname{senh}\alpha)(\cosh\beta+\operatorname{senh}\beta)$$

In definitiva

$$(2.12) \quad \cosh(\alpha+\beta)+\operatorname{senh}(\alpha+\beta)=(\cosh\alpha+\operatorname{senh}\alpha)(\cosh\beta+\operatorname{senh}\beta)$$

Introducendo la funzione exp(x), somma del coseno e del seno iperbolico di x,

$$(2.13) \quad \exp(x)=\cosh x+\operatorname{senh} x$$

si ha

$$(2.14) \qquad \exp(x+y)=\exp(x)\cdot\exp(y)$$

Questa identità indica che la **funzione exp(x) è una potenza**, in quanto gode di una proprietà tipica delle potenze: il prodotto di potenze di ugual base è una potenza di ugual base con esponente uguale alla somma degli esponenti.

La funzione exp(x) è detta **esponenziale naturale** e la sua base, che è exp(1)=cosh(1)+senh(1) è usualmente indicata dalla lettera ***e*** ed è detta numero di Nepero (dal cognome latinizzato del matematico scozzese del XVI secolo J. Napier).

Il numero ***e*** è un irrazionale trascendente, il cui valore, approssimabile con opportuni procedimenti che saranno esposti in seguito, è circa 2.71828182.

Nota la base ***e***, la funzione exp(x) è rappresentabile come potenza di ***e*** e quindi

$$(2.15) \quad e^x=\exp(x)=\cosh x+\operatorname{senh} x$$

Poiché coshx e sinhx sono definiti su tutto R, anche e^x ha per dominio R.

Poiché il coshx è sempre positivo e il suo modulo è sempre maggiore di quello del sinhx, e^x è positiva per ogni x, cioè il codominio di e^x è l'insieme dei reali positivi] 0 ; ∞ [.

Inoltre e^x è maggiore di 1 per ogni x positivo ed è invece minore 1 per ogni x negativo.

e^x è sempre crescente.

Infatti per ogni h positivo $e^{x+h} = e^x e^h > e^x$

Poiché e^x è sempre crescente non ha né massimo né minimo.

Dato che la derivata di una somma è uguale alla somma delle derivate, dalla definizione di e^x come somma di coseno e seno iperbolici si deduce che **la derivata rispetto a x di e^x è e^x.**

3. Formule di Eulero per le funzioni iperboliche

Volendo esprimere coseno e seno iperbolico in funzione dell'esponenziale naturale, ricordando la definizione dell'esponenziale, che il coseno iperbolico è pari e che il seno iperbolico è dispari si può scrivere

$$(3.1) \quad \begin{cases} \cosh x+\operatorname{senh} x=e^x \\ \cosh x-\operatorname{senh} x=e^{-x} \end{cases}$$

Risolvendo il sistema in coshx e sinhx si ottiene

$$(3.2) \quad \begin{cases} \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$$

Le identità (3.2), note come **formule iperboliche di Eulero** (dal nome latinizzato del matematico prussiano del XVIII secolo L. Euler), permettono di esprimere le funzioni iperboliche tramite l'esponenziale naturale. Possono risultare utili per ottenere il loro valore approssimato dalle funzioni standard di una calcolatrice scientifica o di un linguaggio di programmazione che non le forniscano direttamente.

4. Il logaritmo naturale.

Poiché la funzione esponenziale naturale è definita reale su tutto R ed è sempre crescente, essa è una funzione biunivoca e quindi invertibile.
E` cioè possibile definire una funzione ***invexp(x),*** con dominio coincidente con il codominio di ***exp(x)***, tale che, per definizione, ***invexp(exp(x)) = x*** e anche ***exp(invexp(x))=x.***

La funzione, provvisoriamente denominata ***invexp(x)***, inversa dell'esponenziale naturale, è comunemente detta logaritmo naturale o semplicemente logaritmo e viene comunemente indicata con ln (talora anche con log).

Si ha quindi, per definizione

$$(4.1) \quad \begin{cases} \ln e^x = x \\ e^{\ln x} = x \end{cases}$$

Se $a = e^x$ allora $\ln a = \ln e^x = x$, quindi $a = e^x$ e $x = \ln a$ sono due espressioni del tutto equivalenti: sono solo due modi diversi di esprimere la stessa relazione tra a e x.
Va notato che $a = e^x$ ha senso solo se a è positivo (l'esponenziale è sempre positiva) quindi anche $x = \ln a$ ha senso solo se a è positivo: l'argomento di un logaritmo deve essere positivo.

Quest'ultima osservazione non fa che ribadire il concetto che il dominio del logaritmo è il codominio dell'esponenziale. Viceversa il codominio del logaritmo è il dominio dell'esponenziale, cioè R.

Quindi il logaritmo può assumere qualunque valore positivo, negativo o nullo.

In particolare, $e^0=1$ implica $\ln 1=0$.

Il logaritmo è una funzione sempre crescente, dunque gli argomenti minori di 1 hanno logaritmo negativo, quelli maggiori di 1 hanno logaritmo positivo.

Il logaritmo di ***e*** è 1.

La derivata del logaritmo

Dalla prima delle identità (4.1), uguagliando le derivate di entrambi i membri e ricordando la regola di derivazione delle funzioni composte, si ottiene

$$(4.2) \quad e^{\ln x} D[\ln x] = 1$$

e quindi

$$(4.3) \quad D_x[\ln x] = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

Identità fondamentale dei logaritmi.

Le uguaglianze

$$(4.4) \quad \begin{cases} a = e^{\alpha} \\ b = e^{\beta} \end{cases}$$

sono del tutto equivalenti a

$$(4.5) \quad \begin{cases} \alpha = \ln a \\ \beta = \ln b \end{cases}$$

Moltiplicando membro a membro le uguaglianze (4.4) si ottiene

$$ab = e^{\alpha+\beta}$$

$$\alpha + \beta = \ln(ab)$$

$$(4.5) \quad \ln a + \ln b = \ln(ab)$$

Il logaritmo di un prodotto è uguale alla somma dei logaritmi dei fattori.

E\` immediato estendere questa proprietà al caso di un numero qualunque di fattori.

Corollari

Da ***ln 1=0*** segue

$$\ln\left(a\frac{1}{a}\right) = 0$$

$$\ln a + \ln\frac{1}{a} = 0$$

$$(4.6) \quad \ln\frac{1}{a} = -\ln a$$

Il logaritmo del reciproco di un numero è uguale all'opposto del logaritmo dello stesso numero.

$$(4.7) \quad \ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

Il logaritmo di un quoziente è uguale alla differenza tra i logaritmi dei suoi termini.

Posto

$$y = \ln a^x$$

segue

$$a^x = e^y$$

elevando entrambi i membri alla 1/x,

$$a = e^{\frac{y}{x}}$$

$$\frac{y}{x} = \ln a$$

$$y = x \ln a$$

Confrontando la prima con l'ultima uguaglianza si ottiene

$$(4.8) \quad \ln a^x = x \ln a$$

Il logaritmo di una potenza è uguale al prodotto dell'esponente per il logaritmo della base.

$$(4.9) \quad \ln \sqrt[n]{a} = \ln a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\ln a$$

Il logaritmo di una radice è uguale al prodotto del reciproco dell'indice per il logaritmo del radicando.

5. Esponenziali e logaritmi in base reale.

Dalla (4.8) ***ln*** $\boldsymbol{a^x}$ ***=x ln a*** segue

$$(5.1) \quad a^x = e^{x \ln a}$$

Una esponenziale di base diversa da quella naturale è equivalente alla esponenziale naturale con esponente moltiplicato per il logaritmo della base.

Quest'ultima osservazione implica che le esponenziali in base diversa da ***e*** sono concepibili solo per basi positive (diverse da 1), ed hanno le stesse proprietà dell'esponenziale naturale: sono definite su tutto R, sono sempre positive, sono monotòne (crescenti se a>1, decrescenti se a<1), sono invertibili.

La funzione inversa di una esponenziale in base a è detta **logaritmo in base a** e si indica con ***log***$_a$.

I logaritmi in base 10, detti logaritmi decimali, spesso si indicano con ***Log***.

Per definizione

$$(5.2)\quad \begin{cases} \log_a a^x = x \\ a^{\log_a x} = x \end{cases}$$

Uguagliando i logaritmi naturali della seconda delle (5.2) si ottiene

$$(5.3)\quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Il logaritmo in base a di un numero x è proporzionale al logaritmo naturale di x: si ottiene da questo dividendolo per il logaritmo naturale della base.

Dato che il logaritmo in base qualunque a è proporzionale al logaritmo naturale di a, le proprietà dei logaritmi naturali si estendono anche a quelli in base qualunque.

Ad esempio:

$$(5.4)\quad \log_a xy = \frac{\ln xy}{\ln a} = \frac{\ln x + \ln y}{\ln a} = \frac{\ln x}{\ln a} + \frac{\ln y}{\ln a} = \log_a x + \log_a y$$

cioè,

qualunque sia la base, il logaritmo di un prodotto è uguale alla somma dei logaritmi dei fattori.

6. Le funzioni iperboliche inverse.

Arcoseno iperbolico.

La funzione seno iperbolico, reale su tutto R, è sempre crescente, quindi biunivoca, quindi invertibile.

La sua funzione inversa, detta ***arcoseno iperbolico***, deve per definizione essere tale che, per ogni y, ***arcsenh(senh y)=y*** e, posto ***x=senh y***, ***y=arcsenh x***.

Usando le formula di Eulero (3.2) per il seno iperbolico

$$(6.1)\quad x = \operatorname{senh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

Ricavando dalla (6.1) y in funzione di x

$$e^y - \frac{1}{e^y} = 2x$$

$$e^{2y} - 2xe^{y} - 1 = 0$$

Risolvendo l'equazione trinomia in ***e**^y* si ottiene

$$e^{y} = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

(La soluzione algebrica

$$e^{y} = x - \sqrt{x^2 + 1}$$

*non è accettabile, perché risulterebbe negativa ma **e**^y non può essere negativo.)*

Calcolando il logaritmo di entrambi i membri si ottiene

$$(6.2) \quad y = arc\,\mathrm{senh}\, x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

Arcocoseno iperbolico.

Il cosh(x), a differenza di senh(x), è una funzione pari, decrescente per x<0, crescente per x>0, ha un minimo in 0 e ha come codominio l'insieme [1 ; ∞[.
Il coseno non è biunivoco e **può essere invertito o in R_+ o in R_- e, in ogni caso, l'arcocoseno può essere applicato solo a numeri non minori di 1.**

Scegliendo come intervallo di invertibilità R_+, per ogni y di tale intervallo, per definizione, si avrà ***arcch(cosh y) = y*** e, posto

x = cosh y, segue ***y = arccosh x***.

Usando le formule di Eulero (3.2) per il coseno iperbolico

$$(6.3) \quad x = \cosh y = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}$$

Ricavando y in funzione di x

$$e^{y} + \frac{1}{e^{y}} = 2x$$

$$e^{2y} - 2xe^{y} + 1 = 0$$

Risolvendo l'equazione trinomia in ***e**^y* si ottiene

$$e^{y} = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

(La soluzione algebrica

$$e^{y} = x - \sqrt{x^2 - 1}$$

non è accettabile, perché, per x>1, risulterebbe minore di 1 ma, poiché y≥0, e^y≥1.)

Calcolando il logaritmo di entrambi i membri si ottiene

$$(6.4) \quad y = \operatorname{arccosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

Arcotangente iperbolica.

Con considerazioni e procedure analoghe a quelle esposte per il seno e per il coseno iperbolici si può esprimere tramite un logaritmo anche la tangente iperbolica. Si ottiene

$$(6.5) \quad \operatorname{arctgh} x = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

7. Sviluppi in serie

Le funzioni circolari e iperboliche dirette e inverse e le funzioni esponenziali e logaritmiche, così come i numeri reali *π* ed *e*, sarebbero di scarsa utilità se non fosse possibile dedurne i valori.

Deve essere comunque chiaro che, trattandosi di valori reali, conoscere tali valori significa individuare un **algoritmo** che produca una successione di valori razionali che converga al valore reale, cioè di fare in modo che il valore assoluto della differenza tra il valore reale e una sua approssimazione razionale possa essere resa piccola a piacere. Per le applicazioni pratiche sono sufficienti buone approssimazioni razionali dei valori reali.

Un semplice esempio di una successione di questo genere è quella costituita dalle potenze con esponente naturale ***i*** di un numero reale x con $|x|<1$.

I termini di tale successione, all'aumentare di ***i***, risultano sempre più prossimi a 0. Si esprime questo fatto dicendo che, per ogni x reale tale che $|x|<1$

$$(7.1) \quad \lim_{i\to\infty} x^i = 0$$

(leggere: "il limite di x^i per ***i*** tendente a infinito è 0")

cioè che, per qualunque ε positivo si fissi, si può trovare un numero naturale n (tanto più grande quanto più ε è piccolo) a partire dal quale, $|x^i| < \varepsilon$.

Sulla base di questa osservazione, si possono individuare altri interessanti algoritmi convergenti a numeri reali.

Serie geometrica.

Si dimostra facilmente che, per ogni x reale diverso da 1,

$$(1-x)\left(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1}\right) = 1-x^n$$

cioè che

$$(7.2)\quad \frac{1-x^n}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} x^i$$

Se |x|<1, il limite per n→∞ della frazione è uguale al limite della somma

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} x^i$$

In definitiva, si potrà scrivere, semplificando la notazione,

$$(7.3)\quad \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$$

Dalla (7.3) questa si deduce

$$(7.4)\quad \sum_{i=0}^{\infty} (-x)^i = \frac{1}{1+x}$$

Serie di Mercatore.

La frazione

$$\frac{1}{1+x}$$

è la derivata del ln(1+x).

Allora, sempre per |x|<1 e ricordando che ln 1 = 0, si può viceversa dire che, ln(1+x) è la primitiva della somma

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-x)^i = 1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots$$

e quindi, integrando tutti gli addendi della somma,

$$(7.5)\qquad \ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\ldots = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{x^{i+1}}{i+1}$$

Risulta quindi possibile approssimare i logaritmi di tutti i numeri nell'intervallo]0;2[e l'approssimazione sarà tanto migliore quanto più alto è il numero degli addendi nella somma.

La sommatoria (7.5) è detta **Serie di Mercatore** (dal nome latinizzato del matematico danese che la propose per primo (1620-1687). Tale serie, oltre ad avere un dominio di convergenza limitato, ha il difetto di convergere molto lentamente, ma da essa è possibile ricavare serie convergenti più velocemente su tutto il dominio del logaritmo.

Dalla serie di Mercatore si ricava infatti

$$(7.6)\quad \ln(1-x) = -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}-\ldots$$

Sottraendo membro a membro la (7.6) dalla (7.5) e applicandola proprietà fondamentale dei logaritmi si ottiene

$$(7.7) \quad \ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} \ldots\right)$$

Ad esempio, per avere il ln10, posto

$$\frac{1+x}{1-x} = 10$$

si ricava

$$x = \frac{9}{11}$$

Si ha quindi dalla (7.7)

$$\ln 10 = 2\left(\frac{9}{11} + \frac{1}{3}\left(\frac{9}{11}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{9}{11}\right)^5 + \ldots\right)$$

Arcotangente iperbolica.

La serie (7.7) può anche essere scritta nel seguente modo

$$(7.8) \quad \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} \ldots$$

ma l'espressione a primo membro equivale alla arcotangente iperbolica (6.5), quindi

$$(7.9) \quad \operatorname{arctgh} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} \ldots$$

Arcotangente circolare.

Dalla (7.4)

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$$

segue

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots$$

Il primo membro è la derivata dell'arcotangente circolare, quindi l'arcotangente circolare si ottiene integrando la somma a secondo membro, con la condizione che arctg(0) = 0:

$$(7.5) \quad \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots$$

Quest'ultima serie è particolarmente interessante perché da essa si ricava un algoritmo per il calcolo di π:

$$(7.6) \quad \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

e quindi

$$(7.7) \quad \pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots\right)$$

Questa serie per il calcolo di π è nota come ***serie di Leibniz***.

Lo sviluppo di McLaurin.

Come le funzioni trattate finora in questo paragrafo, in generale qualunque funzione f(x) definita per x=0 e indefinitamente derivabile in tale punto può essere espressa da una somma di monomi costituiti dalla potenze successive della variabile x moltiplicati per opportuni coefficienti o, come più comunemente si dice, può essere sviluppata in serie di potenze

$$(7.8) \quad f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

Ammettendo la (7.8) infatti si ottiene

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + \ldots$$

$$a_0 = f(0)$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + 6a_6 x^5 + \ldots$$

$$a_1 = f'(0)$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2a_3 x + 4\cdot 3a_4 x^2 + 5\cdot 4a_5 x^3 + 6\cdot 5a_6 x^4 + \ldots$$

$$a_2 = \frac{1}{2} f''(0)$$

$$f'''(x) = 3\cdot 2a_3 + 4\cdot 3\cdot 2a_4 x + 5\cdot 4\cdot 3a_5 x^2 + 6\cdot 5\cdot 4a_6 x^3 + \ldots$$

$$a_3 = \frac{1}{3\cdot 2} f'''(0)$$

$$f^{(4)}(x) = 4\cdot 3\cdot 2a_4 + 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2a_5 x + 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3a_6 x^2 + \ldots$$

$$a_4 = \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2} f^{(4)}(0)$$

e procedendo per induzione si ottiene in generale

$$(7.9) \quad a_i = \frac{1}{i!} f^{(i)}(0)$$

dove con ***i!*** (che si legge i fattoriale) si denota il prodotto di tutti i naturali da 1 a i e con $f^{(i)}(x)$ la derivata i-esima di ***f(x)***.

Per estendere la validità della (7.9) al caso i=0 si assume che ***0!=1*** e che $f^{(0)}(x)=f(x)$.

La (7.9) inserita nella (7.8) fornisce lo **sviluppo in serie di potenze di Mac Laurin**

$$(7.10) \quad f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} f^{(i)}(0)\, x^i$$

È abbastanza agevole verificare che gli sviluppi in serie precedentemente ottenuti possono essere dedotti direttamente usando la (7.10).

L'esponenziale naturale e le funzioni dirette iperboliche.

Lo sviluppo in serie di potenze più immediato che si ottiene con la (7.10) è quello della funzione esponenziale naturale e^x per la quale tutte le derivate coincidono con la funzione stessa e, per x=0, valgono 1

$$(7.11) \quad e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots$$

La serie (7.11) permette di approssimare a piacere il numero di Nepero ***e*** = e^1

$$(7.12) \quad e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

Dalla (7.11) si ha anche

$$(7.13) \quad e^{-x} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^i}{i!} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 - \ldots$$

Utilizzando le formule iperboliche di Eulero (3.2), si ottengono dalle (7.12) e (7.13) le serie per il seno e coseno iperbolici, che possono comunque essere direttamente dedotte dalla (7.10)

$$(7.14) \quad \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$(7.15) \quad \operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Le funzioni circolari dirette.

Utilizzando la (7.10) si ottengono abbastanza agevolmente gli sviluppi in serie di potenze per il seno e coseno circolari

$$(7.16) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$(7.17) \quad \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Le serie (7.16) e (7.17) differiscono dalle serie (7.14) e (7.15) solo per l'alternanza dei segni dei monomi. Se nelle (7.14) e (7.15) si sostituisce all'argomento reale x l'argomento complesso ix (dove i è l'unità immaginaria) si ha

$$(7.18) \quad \cosh ix = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \cos x$$

$$(7.19) \quad \operatorname{senh} ix = ix - i\frac{x^3}{3!} + i\frac{x^5}{5!} - i\frac{x^7}{7!} + \ldots = i \operatorname{sen} x$$

Le (7.18) e (7.19) permettono di esprimere con le formule di Eulero anche le funzioni circolari

$$(7.20) \quad \begin{cases} \cos x = \cosh ix = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \operatorname{sen} x = \dfrac{\operatorname{senh} ix}{i} = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{cases}$$

Dalle (7.20) si deduce la seguente identità

$$(7.21) \quad e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

che fornisce una ulteriore possibilità, oltre a quella trigonometrica, per l'espressione dei numeri complessi in coordinate polari; infatti il numero complesso polare z(ρ ; θ) può essere indicato come

$$(7.22) \quad z(\rho;\theta) = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = \rho e^{i\theta}$$

La funzione ζ.

Negli esempi proposti, data una funzione (reale di variabile reale) si è dedotto, in vari modi, il suo sviluppo in serie di MacLaurin. È viceversa possibile usare serie convergenti per definire una funzione. Uno degli esempi più significativi è offerto dalla funzione ζ, introdotta da Eulero per argomenti naturali e poi generalizzata da Riemann su argomenti reali e complessi e ancor oggi molto studiata per le sue molteplici applicazioni, dalla teoria dei numeri primi alla meccanica quantistica.

Limitandosi a considerare argomenti naturali positivi *n* questa funzione è definita da

$$\varsigma(n) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^n} = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \ldots$$

ζ(1) è la serie armonica, che non è convergente.

Si possono invece dimostrare le seguenti uguaglianze utili in varie circostanze:

- $\varsigma(2) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
- $\varsigma(4) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$
- $\varsigma(6) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$