Funzioni iperboliche (Da Wikipedia)

In matematica, le **funzioni iperboliche** costituiscono una famiglia di funzioni speciali dotate di alcune proprietà analoghe a corrispondenti proprietà delle ordinarie funzioni trigonometriche.

Indice

Definizioni

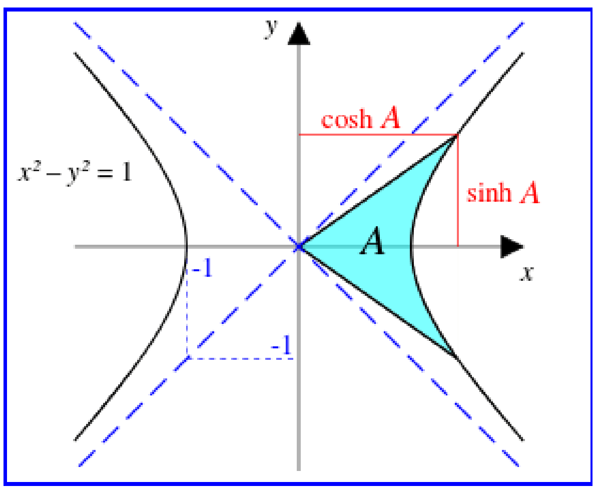


Illustrazione della definizione in termini dell'iperbole equilatera

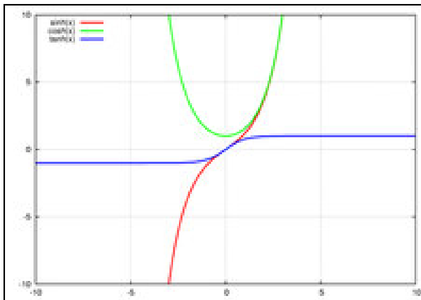
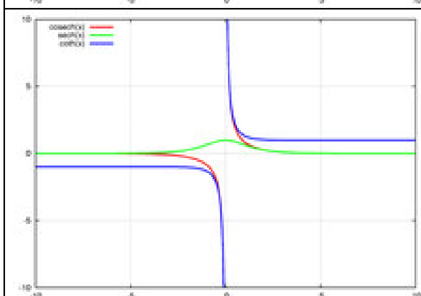
Possiamo definire le funzioni iperboliche in questo modo:

> Data un'iperbole equilatera unitaria, quindi con $a = b = 1$, centrata con gli assi sugli assi coordinati e dato un angolo α, consideriamo il settore iperbolico di apertura $\frac{\alpha}{2}$ed area A: questo determina un punto **P** come intersezione con l'iperbole; definiamo quindi l'ordinata del punto **P** come **seno iperbolico** ($\sinh$) della suddetta area A, nonché la relativa ascissa come **coseno iperbolico** ($\cosh$) sempre della suddetta area A, come indicato in Figura (cioè sinhA e coshA).

Conseguentemente si possono definire le altre funzioni iperboliche tramite $\sinh$e $\cosh$così come si fa per quelle trigonometriche. È inoltre possibile legarle alla funzione esponenziale grazie alla definizione di quest'ultimo (vedi Derivazione delle funzioni iperboliche):

seno iperbolico (dispari)	$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x} = \frac{1 - e^{-2x}}{2e^{-x}}$
coseno iperbolico (pari)	$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x} = \frac{1 + e^{-2x}}{2e^{-x}}$
tangente iperbolica (pari)	$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$
cotangente iperbolica (pari)	$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}}$
secante iperbolica (dispari)	$\operatorname{sech} x = (\cosh x)^{-1} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{2e^x}{e^{2x} + 1} = \frac{2e^{-x}}{1 + e^{-2x}}$
cosecante iperbolica (pari)	$\operatorname{csch} x = (\sinh x)^{-1} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} = \frac{2e^x}{e^{2x} - 1} = \frac{2e^{-x}}{1 - e^{-2x}}$

In queste definizioni x si può considerare variabile reale o complessa.

	Grafici delle funzioni iperboliche: sinh, cosh e tanh (argomenti reali)
	Grafici delle funzioni iperboliche: csch, sech e coth (argomenti reali)

Relazione con le funzioni trigonometriche

Per x reale la funzione $\cosh x$ è una funzione pari, cioè simmetrica rispetto all'asse y; la funzione $\sinh x$ è invece una funzione dispari, cioè simmetrica rispetto all'origine.

Si trovano poi i seguenti valori particolari:

$$\sinh 0 = 0 \qquad \cosh 0 = 1 \qquad \tanh 0 = 0 \qquad \operatorname{sech} 0 = 1$$

Così come al variare della variabile reale t i punti $(\cos t, \sin t)$ definiscono la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$, analogamente i punti $(\cosh t, \sinh t)$ definiscono l'iperbole equilatera $x^2 - y^2 = 1$.

Questa è una conseguenza dell'identità:

$$(\cosh t)^2 - (\sinh t)^2 = 1$$

derivabile dalle definizioni mediante funzioni esponenziali con manipolazioni algebriche elementari.

Al contrario delle corrispondenti funzioni trigonometriche, le funzioni iperboliche non sono periodiche.

L'argomento t delle funzioni seno e coseno che definiscono la circonferenza può essere interpretato naturalmente come un angolo; la t argomento delle funzioni iperboliche rappresenta invece due volte l'area del settore compreso tra il segmento che collega l'origine con il punto $(\cosh t, \sinh t)$ su un ramo dell'iperbole equilatera, l'arco di tale iperbole che dal punto si conclude nel punto $(1, 0)$ sull'asse xe il segmento sull'asse $x$da questo punto all'origine.

Le funzioni iperboliche soddisfano molte identità, simili a corrispondenti identità trigonometriche.

In effetti la regola di Osborn specifica che si può convertire ogni identità trigonometrica in una identità iperbolica sviluppandola completamente in termini di potenze intere di seni e coseni, trasformando ogni $\sin$in $\sinh$e ogni $\cos$in $\cosh$e infine cambiando il segno di ogni termine che contiene un prodotto di due $\sinh$. Procedendo in questo modo, ad esempio, si trovano i teoremi di addizione:

$$\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$$
$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$$

e le formule di bisezione

$$\cosh\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cosh(x)}{2}}$$
$$\sinh\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh(x)-1}{2}}$$

La derivata di $\sinh x$ è data da $\cosh x$ e la derivata di $\cosh x$ è $\sinh x$; questo collegamento si legge facilmente sui grafici delle funzioni.

Il grafico della funzione $\cosh x$è la curva catenaria , profilo assunto da un cavo con densità uniforme con le due estremità fissate e sottoposto alla gravità.

Sviluppi in serie di Taylor

È possibile esprimere le funzioni iperboliche in termini di sviluppi di Taylor:

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

La funzione sinh x ha serie di Taylor con soli termini dispari, e quindi il seno iperbolico è una funzione dispari, ovvero $-\sinh x = \sinh(-x)$, e $\sinh 0 = 0$.

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

La funzione cosh x presenta invece solo termini pari, come ci si aspetta da una funzione pari, simmetrica rispetto all'asse delle y. La somma del seno e del coseno iperbolici rappresenta lo sviluppo della funzione esponenziale.

$$\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}x^{2n-1}}{(2n)!}, |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\coth x = x^{-1} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + \cdots = x^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}B_{2n}x^{2n-1}}{(2n)!}, 0 < |x| < \pi$$

(Serie di Laurent)

$$\operatorname{sech} x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} - \frac{61x^6}{720} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_{2n}x^{2n}}{(2n)!}, |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{csch} x = x^{-1} - \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} - \frac{31x^5}{15120} + \cdots = x^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-2^{2n-1})B_{2n}x^{2n-1}}{(2n)!}, 0 < |x| <$$

(Serie di Laurent)

dove

B_n è l'n-esimo numero di Bernoulli,
E_n è l'n-esimo numero di Eulero.

Funzioni iperboliche inverse

Le inverse delle funzioni iperboliche sono:

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

$$\operatorname{artanh}(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\operatorname{arcoth}(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

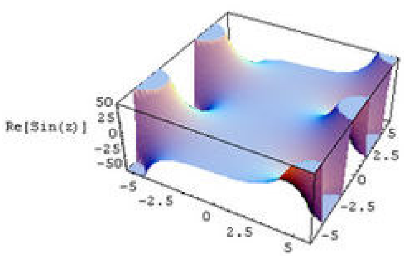
$$\operatorname{arsech}(x) = \ln\left(\frac{1 \pm \sqrt{1-x^2}}{x}\right)$$

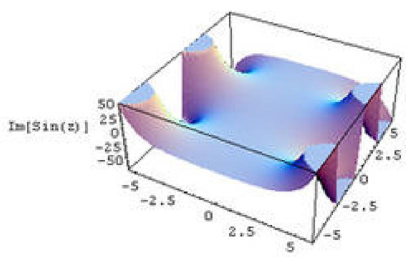
$$\operatorname{arcsch}(x) = \ln\left(\frac{1 \pm \sqrt{1+x^2}}{x}\right)$$

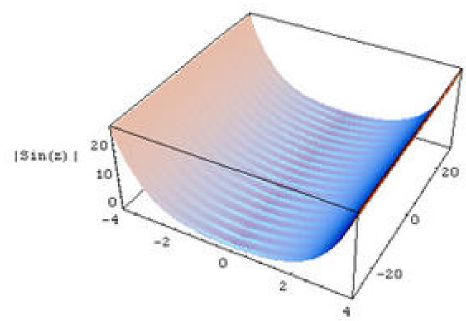
Funzioni iperboliche fornite da integrali

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arsinh}(x) + c = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + c$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcosh}(x) + c = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + c$$
$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{\operatorname{arsinh}(x) + x\sqrt{x^2+1}}{2} + c = \frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1}) + x\sqrt{x^2+1}}{2} + c$$
$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{-\operatorname{arcosh}(x) + x\sqrt{x^2-1}}{2} + c = \frac{-\ln(x+\sqrt{x^2-1}) + x\sqrt{x^2-1}}{2}$$
$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{artanh}(x) + c = \tfrac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$$

Funzioni iperboliche di argomento complesso







Dato che la funzione esponenziale può essere definita per ogni argomento complesso, possiamo estendere la definizione delle funzioni iperboliche anche agli argomenti complessi. Le funzioni sinh z e cosh z sono quindi olomorfe per ogni argomento complesso, e si possono sviluppare in serie di Taylor.

Le relazioni con le funzioni trigonometriche sono ottenute dalla formula di Eulero per i numeri complessi:

$$e^{ix} = \cos x + i\ \sin x$$
$$\cosh(ix) = \frac{(e^{ix}+e^{-ix})}{2} = \cos(x)$$
$$\sinh(ix) = \frac{(e^{ix}-e^{-ix})}{2} = i\sin(x)$$
$$\tanh(ix) = i\tan(x)$$
$$\sinh(x) = -i\sin(ix)$$
$$\cosh(x) = \cos(ix)$$
$$\tanh(x) = -i\tan(ix)$$
$$\operatorname{arsinh}(x) = i\arcsin(-ix)$$
$$\operatorname{arcosh}(x) = i\arccos(x)$$
$$\operatorname{artanh}(x) = i\arctan(-ix)$$