Matrici

(Tabelle di elementi disposti su m righe e n colonne)

Di particolare interesse le matrici *quadrate* (m=n):

Es. (m=n=3):

$$V = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Matrici

Un vettore a n componenti (coordinate), cioè appartenente allo spazio $\mathbf{R}^n$, si può rappresentare come una matrice a n righe e una colonna (detta anche *vettore colonna*)

Es.: il vettore **u** = (3; -2; 1) come:

$$u = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrici come operatori

Come si applica una matrice a un vettore?

Ad es.: una matrice quadrata 3x3 (di terz'ordine) applicata a un vettore **u** di $\mathbf{R}^3$, lo trasforma in un vettore **v** ancora di $\mathbf{R}^3$.

$$A\,\mathbf{u} = \mathbf{v}$$

Matrici come operatori

Come si applica una matrice a un vettore?

$$\mathbf{A\ u = v}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Matrici come operatori

Come si applica una matrice a un vettore?

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Mediante il **prodotto matriciale righe x colonne**:

Il **primo elemento, x_2**, del vettore trasformato si ottiene moltiplicando la prima riga della matrice per il vettore colonna (x_1, y_1, z_1), come somma dei prodotti degli elementi omologhi:

$$x_2 = a_{11}\, x_1 + a_{12}\, y_1 + a_{13}\, z_1$$

Matrici come operatori

Come si applica una matrice a un vettore?

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Il secondo elemento, y_2, del vettore trasformato si ottiene moltiplicando la seconda riga della matrice per il vettore colonna (x_1, y_1, z_1):

$$y_2 = a_{21}\,x_1 + a_{22}\,y_1 + a_{23}\,z_1$$

Matrici come operatori

Come si applica una matrice a un vettore?

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Il **terzo elemento, z_2,** del vettore trasformato si ottiene moltiplicando la terza riga della matrice per il vettore colonna (x_1, y_1, z_1):

$$z_2 = a_{31}\, x_1 + a_{32}\, y_1 + a_{33}\, z_1$$

Matrici come operatori

Come si applica una matrice a un vettore?

Es.1:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 21 \end{bmatrix}$$

$1 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 = -1; \quad 5 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 21$

Matrici come operatori

Come si applica una matrice a un vettore?

Es.2: $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + (-2) \cdot (-4) = 10;$

$0 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 1 \cdot (-4) = 1$

$1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + (-3) \cdot (-4) = 17$

Equazioni vettoriali e sistemi lineari

$$\mathbf{A\,x = c}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

Quest'*equazione vettoriale* (l'incognita è il vettore **x**, cioè le sue componenti x_1, x_2, x_3) equivale a porre in forma matematica il problema: " Data la matrice A e il vettore **c**, qual è il vettore **x** tale che applicando A ad **x** si ottenga **c**? "

Equazioni vettoriali e sistemi lineari

$$\mathbf{A\,x = c}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

Applicando il prodotto righe per colonne si ottiene:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3 \end{cases}$$

Equazioni vettoriali e sistemi lineari

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3 \end{cases}$$

L'equazione vettoriale $Ax = c$ è quindi equivalente a un *sistema di equazioni lineari* (= di primo grado), o semplicemente *sistema lineare* nelle incognite x_1, x_2, x_3 (in questo caso il sistema è "quadrato" 3x3)

Equazioni vettoriali e sistemi lineari

Un sistema lineare può avere:

a) Un'*unica soluzione* (terna ordinata di valori x_1^*, x_2^*, x_3^*, vale a dire un vettore $\mathbf{x}^* = (x_1^*; x_2^*; x_3^*)$)

b) Infinite soluzioni

c) Nessuna soluzione

Equazioni vettoriali e sistemi lineari

Matrici e determinanti

Per *matrice del sistema* (A) si intende la matrice formata dai coefficienti delle incognite.

Nel caso esemplificato, A è:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Equazioni vettoriali e sistemi lineari

Il *determinante di una matrice quadrata* - det(A) - è un *numero* (vedi regole per il calcolo di un determinante).

Lavori sui determinanti apparvero già nella seconda metà del sec XVIII ad opera di: E. Bézout (1730-1783), A.T. Vandermonde (1735-1796), e proseguirono nel secolo successivo soprattutto ad opera di:

Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

Joseph-Louis Lagrange (1749-1827)

Determinante di una matrice *quadrata*

Il *determinante di una matrice quadrata* A

si scrive det(A) o anche D_A, oppure con due barre verticali ai lati della tabella-matrice

$$\mathrm{Det}(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Esso è un numero reale (positivo, negativo o nullo)

Regole per il calcolo di un determinante

Esiste un teorema dal quale discende un metodo generale per il calcolo dei determinanti di matrici quadrate di qualsiasi ordine.

Ci limitiamo qui a dare regole pratiche per calcolare i determinanti fino al 3°ordine.

1) Il *determinante di una matrice quadrata* di 1°ordine (un solo elemento a_{11}) coincide con l'elemento stesso.

2) Il *determinante di una matrice quadrata* di 2°ordine

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

è uguale a: $Det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

[diagonale principale ( ) meno

diagonale secondaria ( )]

Es.:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad Det(A) = (-3)*2 - 5*2 = -16$$

Regole per il calcolo di un determinante

3) Il *determinante di una matrice quadrata* di **3°**ordine

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

si può calcolare con la regola di Sarrus.

Regole per il calcolo di un determinante

Regola di Sarrus (solo per matrici di 3° ordine)

Si aggiungano a destra le prime due colonne:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Si possono così considerare

tre diagonali principali ( )

e tre diagonali secondarie ( )

Regole per il calcolo di un determinante

Regola di Sarrus (<u>solo</u> per matrici di 3° ordine)

Si aggiungano a destra le prime due colonne:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Si calcolano i prodotti degli elementi di ogni diagonale principale e si sommano. Sia DP il risultato:

$DP = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32})$

Regole per il calcolo di un determinante

Regola di Sarrus (<u>solo</u> per matrici di 3° ordine)

Si aggiungano a destra le prime due colonne:

$$\left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right] \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Si calcolano ora i prodotti degli elementi di ogni diagonale secondaria e si sommano. Sia DS il risultato:

$DS = (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$

Regole per il calcolo di un determinante

Regola di Sarrus (<u>solo</u> per matrici di 3° ordine)

Si aggiungano a destra le prime due colonne:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Il determinanate della matrice data risulta:

Det(A) = DP - DS

Equazioni vettoriali e sistemi lineari

Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Carl Gustav Jacobi (1804-1851)

Equazioni vettoriali e sistemi lineari

Eugène Rouché
(Francia, 1832-1910)

Alfredo CAPELLI
(Milano, 1855-1910)

Tra i loro numerosi lavori, il Teorema che prende il loro nome, sulle soluzioni dei sistemi algebrici lineari

(qui non riportato)

Equazioni vettoriali e sistemi lineari

Per i *sistemi quadrati* vale il

TEOREMA DI CRAMER:

Gabriel Cramer (1704 – 1752)

Ip.: $\det(A) \neq 0$

$\Updownarrow$

Th.: Il sistema ammette una ed una sola soluzione (un vettore, cioè una successione ordinata di numeri)

Equazioni vettoriali e sistemi lineari

Il teorema di Cramer recita:

"*Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema quadrato ammetta un'unica soluzione è che il determinante del sistema sia diverso da zero*"

Se invece il *determinante è uguale a zero* il sistema ammette infinite soluzioni oppure nessuna (sistema incompatibile)

In questo caso si ricorre al Teorema di Rouché-Cappelli (teorema generale, valido per qualunque sistema lineare, qui non trattato).

<u>Equazioni vettoriali e sistemi lineari</u>

Se il sistema quadrato è <u>*omogeneo*</u> (tutti i termini noti c_1, c_2, c_3 nulli):

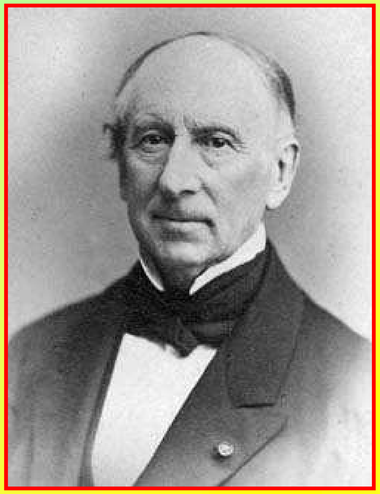
[Si ricorda che ogni sistema omogeneo ammette sempre almeno la *soluzione banale* o *nulla* (0; 0; 0)]

1.- Se il sistema omogeneo è di Cramer ($\det(A) \neq 0$) allora esso ammette <u>solo</u> la soluzione banale.

2.- Se il sistema omogeneo non è di Cramer ($\det(A)=0$), allora il sistema ammette infinite soluzioni (quella banale e altre infinite non banali)

Equazione omotetica o agli autovalori

Jean D'Alembert (1717-1783)



Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Jacques Charles François Sturm (1803-1855)

Carl Gustav Jacobi (1804-1851)

Equazione omotetica o agli autovalori

Appilcando una matrice quadrata di ordine n a tutti i vettori dello spezio $\boldsymbol{R}^n$, ogni vettore verrà, in generale, trasformato in un altro vettore dello stesso spazio.

Ad es., una matrice 3x3 trasforma ogni vettore dello spazio $\boldsymbol{R}^3$ (euclideo tridimensionale) in un altro, generalemnte di diverso modulo e/o direzione e/o verso.

Questione: quali vettori (**x**), in seguito all'applicazione della matrice A conservano la direzione? (e quindi mutano eventualmente solo di modulo e/o verso?)

Equazione omotetica o agli autovalori

Se un vettore **x** dopo la trasformazione $\mathbf{x} \rightarrow A\mathbf{x}$ ha la stessa direzione che aveva prima della trasformazione, cioè $A\mathbf{x} \,||\, \mathbf{x}$, significa che **Ax e x** hanno coordinate proporzionali, cioè che possiamo scrivere:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \qquad (1)$$

Dove λ è il coefficiente di proporzionalità.

La questione posta è quindi rappresentata dall'*equazione vettoriale* (1). Il vettore **x** è l'incognita

Equazione omotetica o agli autovalori

Tale equazione si dice ***equazione omotetica***

o

Equazione agli autovalori

Le sue soluzioni non nulle, cioè i vettori non nulli che in seguito all'applicazione della matrice quadrata A conservano la direzione, si chiamano **autovettori** di A

Sotto quali condizioni esistono gli autovettori di una matrice quadrata e come si calcolano?

Equazione omotetica o agli autovalori

L'equazione (1), con semplici trasformazioni, si può scrivere nella forma equivalente:

$$(A - \lambda I)\, x = 0 \qquad (2)$$

Al secondo membro compare il vettore nullo.

Al primo membro compare la matrice $(A - \lambda I)$ applicata al vettore incognito **x** (dove I è la matrice identità: elementi diagonali uguali a 1 e tutti gli altri uguali a zero).

Essa si chiama ***matrice secolare***

Equazione omotetica o agli autovalori

L'equazione (2) è equivalente a un ***sistema omogeneo*** di equazioni lineari.

Nell'esempio di matrice 3x3 che opera sui vettori dello spazio euclideo tridimensionale):

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33}-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

Equazione omotetica o agli autovalori

Ogni ***sistema omogeneo*** ammette sempre la *soluzione nulla* (o *banale*), cioè il vettore (0; 0; 0).

Se il sistema (quadrato) è di Cramer,

cioè Det $(A - \lambda I) \neq 0$, ammetterà solo la soluzione nulla (che , per definizione non è un autovettore).

Ciò dipende dai valori del parametro λ

Affinchè il sistema, vale a dire l'equazione (2), ammetta soluzioni non nulle, cioè *autovettori*, è necessario e sufficiente che:

$$\text{Det } (A - \lambda I) = 0$$

Equazione omotetica o agli autovalori

$$\text{Det}\,(A - \lambda I) = 0$$

Questa equazione (detta *equazione caratteristica*) è un'equazione algebrica intera di grado n (uguale all'ordine della matrice).

Vi saranno quindi almeno un valore (in generale complesso) di λ e al massimo n, che rendono nullo il determinante secolare.

Per tali valori di λ (soluzioni dell'equazione caratteristica), detti ***autovalori*** della matrice A, e *solo per essi*, il sistema ammetterà soluzioni non banali, cioè *autovettori*.

Equazione omotetica o agli autovalori

Come calcolare gli Autovettori?

1.- Si risolve l'equazione caratteristica (3)

2.- Si sostituisce a λ di volta in volta un autovalore: per ogni autovalore di λ otteremo un sistema quadrato omogeneo <u>non di Cramer.</u>

3.- Si trovano le soluzioni non nulle di tale sistema: la (o le) n-pla di valori trovata (-e) rappresenta le coordinate dell'autovettore corrispondente all'autovalore sostituito.

Se $\mathbf{x}_1$ è un autovettore (ad es. corrispondente all'autovalore $\lambda_{1)}$, è tale anche ogni altro vettore ad esso proporzionale,

$c\mathbf{x}_1$, poiché il sistema è omogeneo.

Equazione omotetica o agli autovalori

Esempio:

Sia data la matrice quadrata 2x2

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

La matrice secolare è: $(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} (2-\lambda) & 0 \\ 1 & (-1-\lambda) \end{vmatrix}$

L'equazione omotetica è: $(A-\lambda I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$

Equazione omotetica o agli autovalori

Tale equazione omotetica è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + 0x_2 = 0 \\ x_1 + (-1-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

Si ha l'equazione secolare:

$\mathrm{Det}\,(A - \lambda I) = (2-\lambda)(-1-\lambda) = 0$

Le cui soluzioni sono:

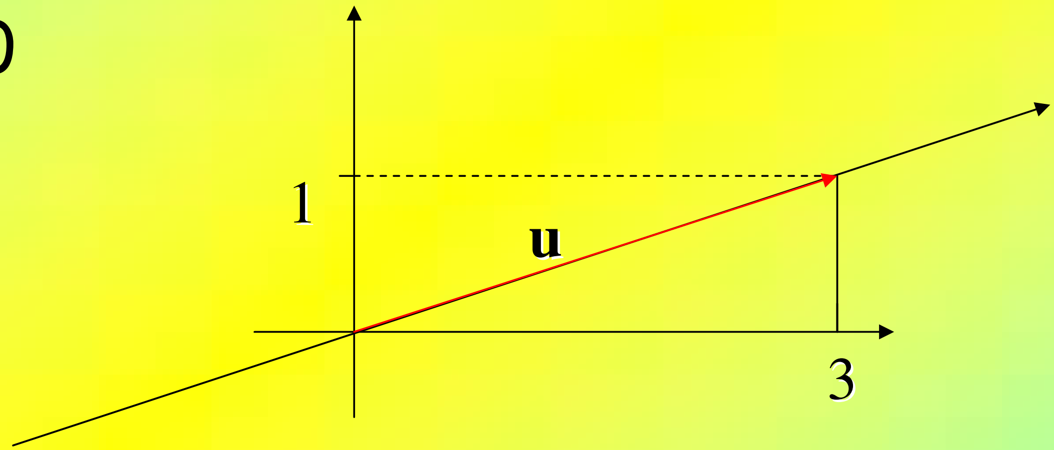
$\lambda_1 = 2$ (primo autovalore); $\lambda_2 = -1$ (secondo autovalore);

Equazione omotetica o agli autovalori

Sostituendo il primo autovalore (2) a λ nel sistema si ha:

$$0\,x_1 + 0\,x_2 = 0$$

$$x_1 \quad - 3x_2 = 0$$



Le cui soluzioni sono:

$x_1 = 3x_2$ (3)

Ciò significa che se assegniamo a una incognita (ad es. x_2) un valore arbitrario, l'altra assume il valore dato dalla (3); per x_2=1, x_1=3.

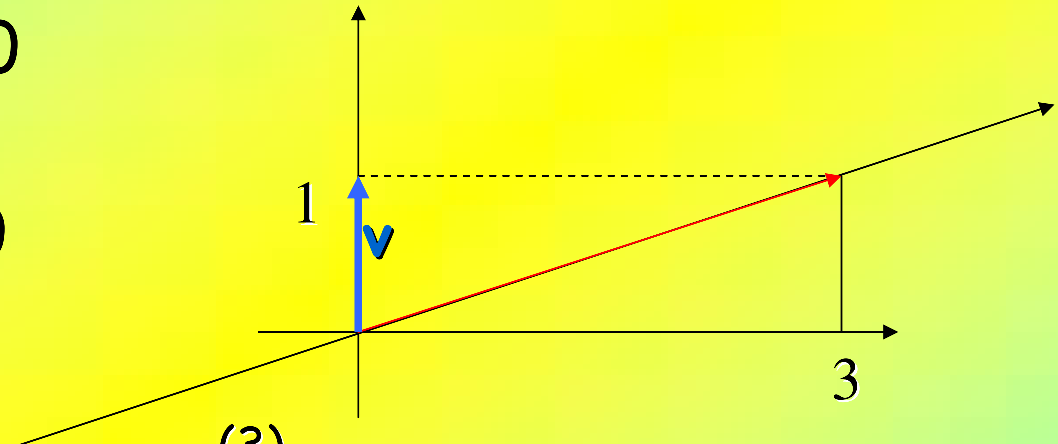
Quindi, ad es. il vettore **u** = (3;1) è un *autovettore* corrispondente all'autovalore 2.
Sono quindi autovettori anche tutti i vettori c(3;1), con c numero arbitrario diverso da zero (cioè tutti i vettori sulla stessa retta del vettore **u** = (3;1)

efo1

Equazione omotetica o agli autovalori

Sostituendo il secondo autovalore (-1) a λ nel sistema si ha:

$$\begin{cases} 3\,x_1 + 0\,x_2 = 0 \\ x_1 \quad + 0\,x_2 = 0 \end{cases}$$



Le cui soluzioni sono:

$x_1 = 0;\ \ x_2 = x_2$ (3)

Ciò significa che x_2 può assumere qualsiasi valore arbitrario, Quindi, ad es. il vettore **v** = (0;1) è un *autovettore* corrispondente all'autovalore -1.

Sono quindi autovettori anche tutti i vettori C(0;1), con c numero arbitrario diverso da zero.

Diapositiva 115

efo1 Admin; 09/01/2012

Equazione omotetica o agli autovalori

L'equazione agli autovalori è di grande importanza per impostare e risolvere problematiche in vari campi di diverse discipline, ad es.:

- *Analisi matematica* (metodi di risoluzione di sistemi lineari di equazioni differenziali)
- *Elettrotecnica* (circuiti elettrici)
- *Quantomeccanica* (orbitali atomici e molecolari)
- *Statistica* (analisi fattoriale, delle componenti principali, ecc.)

OPERATORI

In fisica, riguardo alcune funzioni vettoriali, emergono importanti concetti matematici, quali

Gradiente, Divergenza e Rotore

considerati come *operatori*, che si applicano a funzioni (scalari o vettoriali, in dipendenza dal tipo di operatore).

OPERATORI

Un *operatore* può essere considerato come un dispositivo matematico, una "macchina astratta" , con un ingresso e un'uscita.

Entra un oggetto matematico A ed esce un altro oggetto B, trasformato dall'operatore.

$$A \longrightarrow \boxed{\text{Operatore}} \longrightarrow B$$

Esempio 1: Operatore di moltiplicazione per 3

$$n \longrightarrow \boxed{\text{Moltiplicatore x 3}} \longrightarrow 3n$$

(**n** può essere un numero, un vettore, una funzione, ecc.)

Esempio 2: Operatore di derivazione

$$\underset{\text{(funzione)}}{\mathbf{f(x)}} \longrightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial x}} \longrightarrow \underset{\text{(derivata)}}{\mathbf{f'(x)}}$$

OPERATORI

Consideriamo il seguente vettore "simbolico" ∇ , detto "*nabla*":

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

Esso è un vettore simbolico perché le sue componenti non sono numeri o funzioni scalari, ma gli operatori di derivata parziale

OPERATORI

GRADIENTE

Se applichiamo l'operatore nabla ad una funzione scalare (prodotto di un vettore per uno scalare) a tre variabili indipendenti *f(x,y;z),* otteniamo un vettore le cui componenti sono le derivate parziali della funzione *f* considerata:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} = \mathbf{grad}\ f$$

Tale funzione vettore si chiama *gradiente* della funzione scalare f(x;y;z)

L'operatore nabla è stato quindi applicato a una funzione scalare trasformandola in una funzione vettoriale.

OPERATORI

GRADIENTE

Esempi:

1) Data la funzione $f(x;y;z) = 2xy^3z + 3\ln(xy) - z$:

grad f = $(2y^3z+3/x)\mathbf{i} + (6xy^2z+3/y)\mathbf{j} + (2xy^3-1)\mathbf{k}$

---

2) Data la funzione: $f(x) = 4x^2+2x-1$:

grad f = $(8x+2)\mathbf{i}$

---

3) Data la funzione vettoriale

$\mathbf{f}(x;y;z)= (2xy)\mathbf{i}+(5)\mathbf{j}-(xz)\mathbf{k}$

grad f **non esiste** (non ha significato, perché **f** non è una funzione scalare)

OPERATORI

DIVERGENZA

Consideriamo il prodotto scalare tra l'operatore nabla e una funzione vettoriale **F** (x;y;z),

dove **F** = F_1**i** + F_2**j** + F_3**k** (F_1, F_2, $F_{3,}$ le componenti della funzione vettriale **F**,. sono a loro volta funzioni scalari di x, y e z.

Si verifica facilmente che:

$$\nabla \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \text{div } \mathbf{F}$$

Abbiamo ottenuto la *divergenza* della funzione vettoriale **F**.

L'operatore nabla, applicato ad una funzione vettoriale mediante il prodotto scalare, ha restituito una funzione scalare.

OPERATORI

DIVERGENZA

Esempi:

div **F** = $yz+3x^2y^2z^4+2$

- Data la funzione F= $(xyz)\mathbf{i} + (x^2y^3z^4)\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$:

2) Data la funzione F= $(x)\mathbf{i} + (y)\mathbf{j} + (z)\mathbf{k}$

div **F** = 3

3) Data la funzione F= xy^2z

div F **non esiste** (non ha significato perché F non è una funzione vettoriale ma scalare)

OPERATORI

ROTORE

Consideriamo il prodotto vettoriale tra l'operatore nabla e una funzione vettoriale **F** (x;y;z),

dove **F** = F_x**i** + F_y**j** + F_z**k** (F_x, F_y, F_z, le componenti della funzione vettriale **F**,. sono a loro volta funzioni scalari di x, y e z. Si verifica facilmente che:

^

$$\nabla \wedge \mathbf{F} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) =$$

$$= \mathbf{rot\ F}$$

Abbiamo ottenuto il *rotore* della funzione vettoriale **F**.

L'operatore nabla, applicato ad una funzione vettoriale mediante il prodotto vettoriale, ha restituito una funzione vettoriale.

OPERATORI

ROTORE

Esempi:

1) Data la funzione vettore $\mathbf{F} = (xyz)\mathbf{i} + (x^2y^3z^4)\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$:

   rot F $= (-4x^2y^3z^3)\mathbf{i} + (xy)\mathbf{j} + (2xy3z4-xz)\mathbf{k}$

2) Data la funzione vettore $\mathbf{F} = (x+y+z)\mathbf{i}$

   rot F = j + k

3) Data la funzione scalare $F = x+y+z$:

rot F **non esiste** (rotore provo di significato perché F non è vettoriale)

G. Balla: *Numeri innamorati*