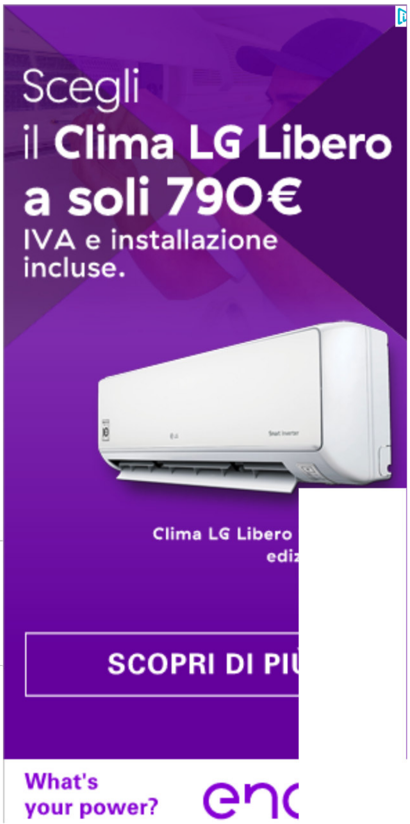
La potenza di matrice

Le matrici | FAQ | *spiegazione semplice* Aggiungi ai tuoi preferiti

KNOWLEDGE

Seleziona lingua Powered by Google Trad

1. Le
2. La
3. Il m
4. La
5. La
6. Il



Data una matrice quadrata A di ordine n e un numero intero non negativo k , la potenza A^k è uguale al prodotto ricorsivo della matrice A per se stessa per k-1 volte.

Attenzione. La potenza della matrice non è l'elevazione a potenza degli elementi della matrice. Questo si verifica solo in alcune circostanze come nelle matrici diagonali.

Un esempio di potenza di matrice

Ho la seguente matrice quadrata A di ordine 2 e voglio calcolare l'elevazione al cubo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Per calcolare la potenza cubica della radice devo moltiplicare la matrice per se stessa per tre volte.

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 19 & 18 \\ 27 & 19 \end{pmatrix}$$

Nota. Come si può notare la potenza A^3 non conduce a una matrice con elementi elevati alla terza perché la moltiplicazione matriciale righe per colonne è un procedimento con proprietà differenti rispetto al prodotto fra numeri reali.

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 19 & 18 \\ 27 & 19 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1^3 & 2^3 \\ 3^3 & 1^3 \end{pmatrix}$$

Le matrici nilpotenti e idempotenti

Una matrice quadrata A di ordine n è detta **nilpotente** di ordine k se la potenza A^k è una matrice nulla (O).

$$A^k = O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Ecco un esempio di matrice nilpotente.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

Una matrice quadrata A di ordine n è detta **idempotente** di ordine k se la potenza A^k è uguale a A.

$$A^k = A$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = A$$

Nota. Le matrici nilpotenti e idempotenti sono risultati possibili soltanto nella moltiplicazione riga per colonna tra matrici.

La potenza zero della matrice

Una qualsiasi matrice quadrata di ordine n elevata a zero dà come risultato una matrice unitaria I di ordine n.

$$A_n^0 = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La potenza della matrice con esponente negativo

Se l'esponente k della potenza è negativo, la potenza della matrice A si calcola moltiplicando per k volte la sua matrice inversa A^{-1}.

$$A^{-3} = A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A^{-1}$$

Il caso delle matrici diagonali

Le matrici diagonali sono l'unico caso in cui la potenza della matrice coincide alla potenza dei singoli elementi.

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 0^3 \\ 0^3 & 2^3 \end{pmatrix}$$

Si tratta comunque di un caso particolare.

Le matrici | FAQ | *spiegazione semplice* Aggiungi ai tuoi preferiti

Seleziona lingua Powered by Google Traduttore

Nel caso delle matrici non vale la regola della potenza del binomio dei numeri reali.

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B)$$
$$= A^2+AB+BA+B^2 \neq A^2+2AB+B^2$$

WWW.ANDREAMININI.ORG

Nota. E' un altro esempio della particolarità della potenza tra matrici che non va confusa con la potenza dei numeri reali, perché segue un procedimento di calcolo differente.

Andrea Minini

Per scrivere un commento

Invia

SHARES