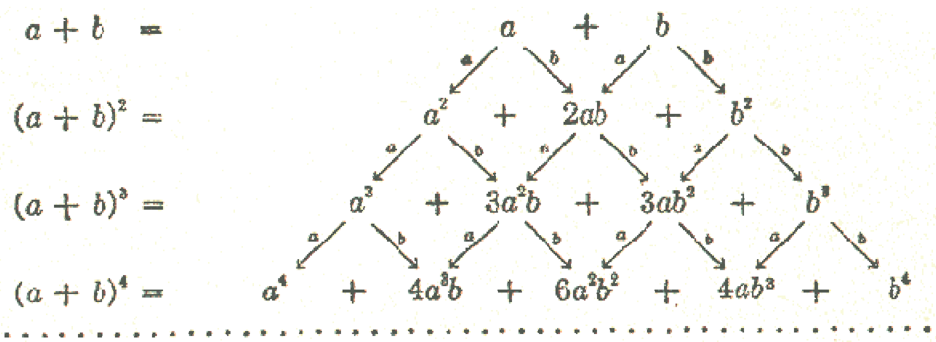
Introduzione ai “Prodotti notevoli”

E' importante possedere una formula che consenta di calcolare in maniera facile l'*n*-esima potenza di un binomio qualsiasi. Utilizzando gli strumenti di calcolo algebrico si trova che:

per $n = 1$
$(a+b)=a+b$
per $n = 2$
$(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)=a\cdot(a+b)+b\cdot(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$
per $n = 3$
$(a+b)^3=(a+b)\cdot(a+b)^2=(a+b)\cdot(a^2+2ab+b^2)=a\cdot(a^2+2ab+b^2)+b\cdot(a^2+2ab+b^2)=$
$\quad =a^3+2a^2b+ab^2+b^2+a^2b+2ab^2+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
e così via?

Quale legge generale nasconde la frase "*e così via*"?
Si può osservare che il procedimento utilizzato si presta a essere ripetuto, per qualsiasi $(a+b)^n$, moltiplicando il risultato ottenuto precedentemente per $(a+b)^{n-1}$, nuovamente per *a* e per *b* e sommando i prodotti ottenuti e riducendo i monomi simili.

Si arriva così al seguente schema:

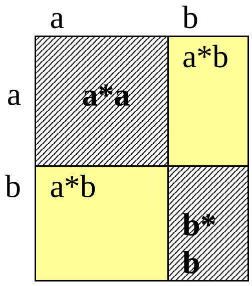


Tratto da: R. Courant, H. Robbins, "Che cos'è la matematica?", Universale Scientifica Boringhieri, 1971

Giustificazione geometrica

Del quadrato di un binomi, e del cubo di un binomio si può dare una giustificazione geometrica dell'espressione algebrica ottenuta in termini rispettivamente di aree e volumi.

Esempio $\quad (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
Area di due quadrati diversi con lato ***a*** e ***b*** e di dure rettangolo ***ab*** uguali.



Alcuni prodotti di polinomi, che si presentano molte volte nelle applicazioni, si calcolano rapidamente applicando regole fisse dette "**Regole dei prodotti notevoli**". Queste regole vanno quindi molto bene imparate a memoria.

Quadrato del binomio

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

Il quadrato della somma algebrica di due monomi è uguale al quadrato del primo monomio, più il doppio prodotto del primo monomio per il secondo, più il quadrato del secondo monomio.

Cubo del binomio

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

Il cubo di un binomio è uguale al cubo del primo termine, più il triplo prodotto del quadrato del primo monomio per il secondo, più il triplo prodotto del primo monomio per il quadrato del secondo, più il cubo del secondo monomio.

Prodotto della somma di due termini per la loro differenza

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

Il prodotto della somma di due termini per la loro differenza è uguale al quadrato del primo termine meno il quadrato del secondo termine.

Quadrato di un polinomio di *n* o più termini

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Il quadrato di un polinomio di un numero qualsiasi di termini è uguale alla somma dei quadrati di tutti i termini più il doppio prodotto, con il relativo segno, di ogni termine per ciascuno di quelli che lo seguono.

Triangolo di Pascal/Tartaglia

Il triangolo di Pascal/Tartaglia riguarda lo sviluppo della potenza n-esima di un binomio. Precisamente lo sviluppo di un binomio con *n* intero e positivo è dato dalla formula:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)}ab^{n-1} + b^n$$

La formula è storicamente dovuta al cinese Chu Shich Chiech (*Prezioso specchio dei quattro elementi*, del 1303), ma fu ritrovata dal matematico italiano Nicolò Fontana detto Tartaglia (*Trattato dei numeri ed misure*, del 1556), il quale diede i coefficienti di questo sviluppo tramite il famoso triangolo che porta, oltre al nome di Blaise Pascal (1623-1662), il suo nome e dove ogni termine di posto *p* di una riga è pari alla somma dei termini di posto *p* e *p-1* della riga precedente.

```
         1
       1   1
     1   2   1
   1   3   3   1
 1   4   6   4   1
. . . . . . . . . . .
```

Per *n* frazionario ma reale qualunque lo sviluppo del binomio detto di Newton è dato dalla **formula di Newton**.

Formulario riassuntivo - Identità e somme notevoli

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$
$$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$$
$$a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)\cdot\left(a^2 + ab + b^2\right)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)\cdot\left(a^2 - ab + b^2\right)$$
$$a^4 + b^4 = \left(a^2 + ab\sqrt{2} + b^2\right)\cdot\left(a^2 - ab\sqrt{2} + b^2\right)$$
$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$
$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2(b+c) + 3b^2(a+c) + 3c^2(a+b) + 6abc$$
$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab$$

Breve eserciziario

Mediante l'uso dei prodotti notevoli, calcolare:

1. Il quadrato di 21 considerato come 20+1.
   Esempio: $(20+1)^2 = 20^2 + 2 \times 20 \times 1 + 1^2 = 400 + 40 + 1 = 441$
2. Il quadrato di 29 considerato come 30-1.
3. Il quadrato di 48 considerato come 50-2.
4. Il quadrato di 61 considerato come 60+1.
5. Il quadrato di 79 considerato come 80-1.
6. Il quadrato di 83 considerato come 80+3.
7. Il prodotto di 19 · 21 considerato come (20-1)(20+1).
   Esempio: $(20-1)\ (20+1) = 20^2 - 1^2 = 400-1 = 399$
8. Il prodotto di 29 · 31 considerato come (30-1)(30+1).
9. Il prodotto di 18 · 22 considerato come (20-2)(20+2).
10. Il prodotto di 48 · 52 considerato come (50-2)(50+2).
11. Il prodotto di 37 · 43 considerato come (40-3)(40+3).

Verificare le seguenti identità.

1. [Euclide] $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$
2. [Euclide] $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$
3. [Waring] $(x+y)^2-2xy=x^2+y^2$
4. [Pitagora] $(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=(a^2+b^2)^2$
5. [Peano] $(m-n)^2+(n-p)^2+(m-p)^2=2\cdot(m^2+n^2+p^2-mn-mp-np)$
6. [Peano] $(m-n)^2+(m-p)^2+(n-p)^2=2\{(m-n)(m-p)+(m-p)(n-p)+(n-p)(n-m)\}$
7. [Waring] $(x+y)^3-3xy(x+y)=x^3+y^3$
8. [Waring] $(x-y)^3+3xy(x-y)=x^3-y^3$
9. [Cauchy] $(a+b)^4-(a-b)^4=8ab(a^2+b^2)$
10. [Waring] $(x+y)^4-4xy(x+y)^2+2x^2y^2=x^4+y^4$
11. [Waring] $(x-y)^4+4xy(x-y)^2+2x^2y^2=x^4+y^4$
12. [Eulero] $(2a+2b-c)^2+(2a+2c-b)^2+(2b+2c-a)^2=9(a^2+b^2+c^2)$
13. [Eulero] $(a^2+2ab+2b^2)+(a^2-2ab+2b^2)=a^4+4b^4$
14. [Tannery] $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2=4(ac+bd)^2+4(bc-ad)^2$
15. [Legendre] $(a+b+c+d)^2+(a+b-c-d)^2+(a-b+c-d)^2+(a-b-c+d)^2=4(a^2+b^2+c^2+d^2)$
16. [Diofanto] $\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(c^2+d^2\right)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$

Autori citati

Euclide (IV secolo a.C.) - Matematico greco, visse ad Alessandria d'Egitto, sotto il regno di Tolomeo I. Sembra abbia studiato in Atene con Socrate e abbia avuto come allievo Platone. Immortale per i suoi "Elementi", in tredici libri.
Diofanto d'Alessandria (III secolo d.C.) - Matematico greco vissuto ad Alessandria d'Egitto, di cui sono pervenute due opere: un libro sui "Numeri Poligonali" ed il trattato "Aritmetica", in sei libri.
Niccolò Fontana detto Tartaglia (1500-1577) - Matematico italiano.
http://es.wikipedia.org/wiki/Niccolo_Fontana_Tartaglia
Blaise Pascal (1623-1662) - Matematico, fisico e filosofo francese.
http://it.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascal
Eulero (Leonhard Euler, 1701-1783) - Matematico svizzero, nato a Basilea, il più fecondo e grande del XVIII secolo. Non c'è parte della matematica in cui Eulero non abbia portato il suo contributo. Autore di numerosi trattati.
Waring Edoard (1734-1798) - Scienziato inglese, di ingegno irrequieto e di carattere sbrigativo. Titolare di cattedra universitaria, lasciò alla fine Euclide per Ippocrate, prestando servizio come medico in Cambridge.
Legendre Adrien Marie (1752-1833) - Geometra e matematico francese, docente alla Scuola Militare, poi successore di Lagrange al Bureau de Longitudes. Di ingegno versatile ed analista di grande valore, celebre per diverse opere di geometria e di matematica.
Cauchy Augustin-Louis (1789-1857) - Matematico francese, professore anche all'Università di Torino. Svolse nel campo della matematica e della fisica un lavoro prodigioso: le sue opere complete occupano 27 volumi.
Peano Giuseppe (1858-1932) - Matematico italiano, docente di calcolo infinitesimale all'Università di Torino. lavorò in diversi campi della matematica lasciando diverse opere.

Bibliografia essenziale

R. Cavalieri, A. Seghezza, C. Simonetti, "Matematica e Informatica 1", Ed. Bulgarini, 1989
AA.VV., "Dizionario dei Termini Matematici", Ed. Rizzoli, 1987
C.B. Boyer, "Storia della Matematica", Ed. A. Mondadori, 1987
A. Puppo, "Prontuario e Formulario di Matematica", 1982
G. Lora, "Storia delle matematiche", Ed. Cisalpino-Goliardica 1982
R. Courant, H. Robbins, "Che cos'è la matematica?", Volume triplo, Universale Scientifica Boringhieri, 1971
G. Zwirner, "Algebra", Ed. Cedam - Padova, 1971