Formule trigonometriche

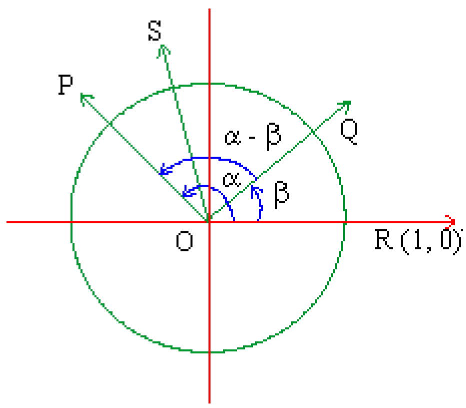
In trigonometria esistono delle formule fondamentali che permettono di calcolare le funzioni goniometriche della somma di due angoli o della loro differenza, della metà, del doppio ecc.

Si chiamano formule di: addizione, sottrazione, duplicazione, bisezione, parametriche, prostaferesi, Werner.

FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

Dimostriamo ora come si arriva alle formule di sottrazione del coseno e del seno, che sono quelle da cui si ricavano le altre in maniera immediata:

Disegniamo la circonferenza goniometrica di equazione $x^2 + y^2 = 1$



Per ipotesi gli angoli RÔS e QÔP sono congruenti e di ampiezza $\alpha-\beta$, i segmenti RQ e PS sono congruenti perché corde uguali che sottendono archi uguali; si avrà quindi:

$$RQ^2 = PS^2$$

e le coordinate dei loro estremi saranno allora:

$$R(1\ ;\ 0)$$

$$P(\cos\alpha\ ;\ \sin\alpha)$$

$$Q(\cos\beta\ ;\ \sin\beta)$$

$$S[\ \cos(\alpha-\beta)\ ;\ \sin(\alpha-\beta)\ ]$$

per la formula della distanza fra due punti è

$$RQ^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2$$

analogamente:

$$PS^2 = [\cos(\alpha-\beta) - 1]^2 + [\sin(\alpha-\beta)]^2$$

quindi possiamo uguagliare le due relazioni ed ottenere in tal modo

$$[\cos(\alpha-\beta)-1]^2 + [\sin(\alpha-\beta)]^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2$$

svolgendo i quadrati si otterrà:

$$\cos^2(\alpha-\beta) + 1 - 2\cos(\alpha-\beta) + \sin^2(\alpha-\beta) - 2\sin(\alpha-\beta) =$$

$$= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta + \sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta$$

per il primo principio della trigonometria, risulta $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ e $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$,

quindi diventa

$$2 - 2\cos(\alpha-\beta) = 2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta$$

semplificando per due e cambiando i segni si ottiene alla fine la formula di sottrazione del coseno:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

Ecco la formula di sottrazione del seno:

ricordando che è $\sin(\alpha-\beta) = \cos[90° - (\alpha-\beta)]$, possiamo scrivere

$$\sin(\alpha-\beta) = \cos[90° - (\alpha-\beta)] = \cos[(90° + \beta) - \alpha)]$$

Utilizzando la formula di sottrazione del coseno e ricordando le relazioni che intercorrono tra archi associati, può scriversi

$$\sin(\alpha-\beta) = \cos[90° - (\alpha-\beta)] = \cos[(90° + \beta) - \alpha] = \cos(90° + \beta)\cos\alpha + \sin(90° + \beta)\sin\alpha =$$

$$-\sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha$$

quindi la formula cercata è

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

Le altre due formule si ricavano facilmente tenendo conto che è

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin[\alpha-(-\beta)] \text{ e } \cos(\alpha + \beta) = \cos[(\alpha-(-\beta)]$$

Quindi le formule di addizione sono le seguenti:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Per la tangente, che sappiamo essere il rapporto tra seno e coseno (2° principio della goniometria), le formule sono:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

valide solo se è $(\alpha+\beta) \neq 90° + k\ 180°$, $(\alpha-\beta) \neq 90° + k\ 180°$, $\alpha \neq 90° + k\ 180°$ ed infine

$\beta \neq 90° + k\ 180°$, in quanto tali valori renderebbero l'espressione priva di significato.

Per la cotangente le formule sono:

$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{1 - \cot\alpha\cot\beta}{\cot\alpha + \cot\beta}$$

$$\cot(\alpha-\beta) = \frac{1 + \cot\alpha\cot\beta}{\cot\alpha - \cot\beta}$$

Vediamo ora qualche applicazione di queste formule: vogliamo ricavare il seno di 75°.

$$\sin 75° = \sin(30°+45°) = \sin 30° \cos 45° + \cos 30° \sin 45° =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}\right)$$

Ora troviamo la tangente di 105°.

$$\tan 105° = \tan(60°+45°) = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$$

razionalizzando diventa

$$-\frac{2\sqrt{3}+4}{2}$$

quindi la tangente di 105° risulta $-\sqrt{3}-2$.

FORMULE DI DUPLICAZIONE

Queste formule permettono di calcolare le funzioni del doppio di un angolo; si ricavano con le formule di addizione.

Calcoliamo il seno di un angolo pari a 2α

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

Per il coseno si procede analogamente:

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

Veniamo a tangente e cotangente ed applichiamo sempre le rispettive formule di addizione:

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \qquad \cot 2\alpha = \frac{1-\cot^2\alpha}{2\cot\alpha}$$

La prima è valida se $\alpha \neq 90° + k\,180°$, la seconda ha significato per $\alpha \neq k\,180°$

Ed ora qualche esempio; le applicazioni di queste formule per determinare le funzioni di angoli sono ben poche, al contrario risultano molto utili e di grande ausilio nella risoluzione delle equazioni e disequazioni trigonometriche.

1) Dimostriamo che il coseno dell'angolo di 90° è nullo:

$$\cos 90° = \cos(45°+45°) = \cos^2 45° - \sin^2 45° = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

2) Dimostriamo che 120° ha lo stesso seno di 60° perché angoli supplementari:

$$\sin 120° = 2\sin 60°\cos 60° = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2) Calcoliamo tan 60°:

$$\tan 60° = \tan(30°+30°) = \frac{2\tan 30°}{1-\tan^2 30°} = \frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \sqrt{3}\,.$$

3) Si vogliano calcolare le radici dell'equazione:

$$\cos 2x + 2\sin(90°-x) - \frac{1}{2} = 0$$

si ottiene

$$\cos^2 x - \sin^2 x + 2\cos x - \frac{1}{2} = 0$$

trasformando tutto in coseno

$$\cos^2 x - (1-\cos^2 x) + 2\cos x - \frac{1}{2} = 0\text{, quindi } 2\cos^2 x + 2\cos x - \frac{3}{2} = 0$$

$$4\cos^2 x + 4\cos x - 3 = 0$$

da cui $\cos x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{4}$;

prima soluzione: $\cos x = \dfrac{1}{2}$ e quindi $x = \pm 60° + k\,360°$

seconda soluzione: $\cos x = \dfrac{3}{2}$ **impossibile perché deve essere $-1 \le \cos x \le 1$**

Di conseguenza l'unica soluzione vale $\pm 60° + k\,360°$.

FORMULE PARAMETRICHE

Esprimono seno e coseno di un angolo in funzione razionale della tangente dell'angolo metà.

Dalle formule di duplicazione, è noto che

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

Dal primo principio della goniometria vale l'espressione $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; operiamo la sostituzione in entrambe le formule

$$\sin 2\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}$$

Calcolando con la proprietà distributiva ed essendo la tangente il rapporto seno/coseno, supponendo sempre che sia $\alpha \neq 90° + k\,180°$, ricaviamo:

$$\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

Sostituendo ora 2α con α e di conseguenza α con $\frac{\alpha}{2}$ le formule diventano

$$\sin\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1 - \tan^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

Oppure, se si pone tan $\frac{\alpha}{2}$ uguale al parametro t (da cui il nome "formule parametriche"),

$$\sin\alpha = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

valide specificamente sempre se il denominatore è diverso da zero, cioè se è $\alpha \neq 180° + k\,360°$

FORMULE DI BISEZIONE

Servono, noti i valori di sin α, cos α e tan α a calcolare i valori delle funzioni trigonometriche dell'angolo metà, cioè:

$$\sin\frac{\alpha}{2},\ \cos\frac{\alpha}{2}\ \text{e}\ \tan\frac{\alpha}{2}$$

Si ricavano dalle formule di duplicazione del coseno, cioè da:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1\ .$$

Ponendo in queste formule $\frac{\alpha}{2}$ al posto di α si ottiene :

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \quad ; \quad \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 \text{ da cui :}$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} \quad ; \qquad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

da cui infine si ricavano le **formule di bisezione :**

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \quad ; \qquad \cos \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

dividendo poi membro a membro le due eguaglianze e supponendo quindi che sia cos α diverso da -1 e quindi α diverso da 180° + k 360°, si ottiene:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Bisogna fare attenzione nella scelta del segno davanti alla radice:

ne va **sempre preso uno solo** e, per decidere quale, bisogna conoscere **il quadrante in cui cade il secondo lato dell'angolo α, eliminando così ogni incertezza.**

Con queste formule si possono ad esempio trovare i valori delle funzioni trigonometriche di angoli come 22°30' essendo 22°30' = $\frac{45°}{2}$ oppure di 15°.

Ad es. per sin 15° si ottiene : $\frac{\sqrt{3}-1}{2-\sqrt{2}}$

Si propone un semplice esercizio :

sapendo che cos α = $\frac{\sqrt{7}}{4}$ e che 270°<α<360° calcolare sin $\frac{\alpha}{2}$, cos $\frac{\alpha}{2}$, tan $\frac{\alpha}{2}$: dunque $\frac{\alpha}{2}$ sarà compreso tra 135° e 180° e quindi si devono prendere i segni...

Altro es. : sapendo che è: sin 3α = $\frac{1}{3}$ e che : 90°< 3α < 180° calcolare $\sin\frac{3}{2}\alpha$, $\cos\frac{3}{2}\alpha$, $\tan\frac{3}{2}\alpha$.

Per svolgere questi esercizi è utile ripassare le formule relative ai radicali doppi.

FORMULE DI PROSTAFERESI

(parola che deriva dal greco e significa: somma e sottrazione)

Come dice il nome, permettono di trasformare in prodotto , la somma o differenza dei seni di 2 angoli e la somma o differenza dei coseni di 2 angoli.

Consideriamo le formule :

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

e sommando prima membro a membro e poi sottraendo sempre membro a membro le 2 formule sopra indicate si ottiene :

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta \qquad \textbf{[1]}$$

$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$$

Analogamente, partendo da:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

si ottiene:

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta \qquad \textbf{[2]}$$

$$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$$

Per dare una forma più semplice alle [1] e [2] poniamo :

$$\alpha+\beta = p$$

$$\alpha-\beta = q$$

e ricaviamo α, β in funzione di p e di q ottenendo :

$$\alpha = \frac{p+q}{2} \; ; \; \beta = \frac{p-q}{2}$$

Sostituendo queste nelle [1] e [2] si ottengono finalmente le **formule di prostaferesi :**

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

Esempio : risolvere l'equazione :

$$\sin 4x - \sin 2x - \sin x = 0$$

Applichiamo le formule di prostaferesi al primo e secondo addendo :

$2 \cos (3x) \sin x - \sin x = 0$ da cui :

$\sin x \,(2 \cos 3x - 1) = 0$ da cui deriva :

$\sin x = 0$ e quindi $x = k\ 180°$

$\cos 3x = \frac{1}{2}$ da cui $3x = \pm 60° + k\ 360°$

le soluzioni sono pertanto : $x = k\ 180°$, $x = \pm 20° + k\ 120°$

Altro esempio : risolvere l'equazione :

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$$

Applichiamo le formule di prostaferesi al primo e terzo addendo ottenendo :

$2 \sin 2x \cos x + \sin 2x = 0$ da cui :

$\sin 2x = 0$ da cui: $2x = k\ 180°$ e quindi $x = k\ 90°$

$2 \cos x + 1 = 0$ cui segue : $\cos x = -\frac{1}{2}$ e quindi $x = \pm 120° + k\ 360°$

Esercizio da svolgere :

$\cos 2x + \cos 5x - \cos \frac{7}{2}x = 0$ (la soluzione è : $x = 25.71° + k\ 51{,}42°$; $x = \pm 40° + k\ 240°$)

FORMULE DI WERNER

Si può osservare che dalle [1] e [2] si ricavano queste formule :

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\ [\ \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\ ]$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\ [\ \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\ ]$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\ [\ \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\ ]$$

$$\cos\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\ [\ \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\ ]$$

che trasformano un prodotto di funzioni trigonometriche in una somma algebrica.

Esempio: risolvere la seguente equazione :

$\cos 3x \cos 4x = \cos 5x \cos 2x$, applicando le formule di Werner si ha:

$\frac{1}{2}(\cos 7x + \cos x) = \frac{1}{2}(\cos 7x + \cos 3x)$ da cui semplificando :

$\cos x - \cos 3x = 0$ e quindi applicando le formule di prostaferesi si ottiene:

$-2 \sin 2x \sin(-x) = 0$ da cui $\sin 2x \sin x = 0$ e quindi compattando le soluzioni si ottiene $x = k\ 90°$

SENO E COSENO IN FUNZIONE DELLA TANGENTE

Esiste un modo per esprimere seno e coseno di un angolo in tangente. A tale scopo si usano delle formule molto utili per la risoluzione di equazioni e disequazioni goniometriche; vediamo come arrivarci.

Partiamo dalla relazione fondamentale:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

dividiamo tutto per $\cos^2 \alpha$ supponendo che sia $\alpha \neq 90° + k\ 180°$ e otteniamo:

$$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

Ora facciamo il reciproco di entrambi i membri:

$$\frac{1}{\tan^2 \alpha + 1} = \cos^2 \alpha \ [1]$$

A questo punto possiamo scrivere il coseno in funzione della tangente:

$$\cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{\tan^2 \alpha + 1}}$$

ricordando che la scelta del segno dipende sempre dal quadrante in cui cade il secondo lato dell'angolo.

Per esprimere ora il seno in funzione della tangente, si può procedere trasformando $\cos^2 \alpha$ in seno, ottenendo dalla [1]:

$$\frac{1}{\tan^2 \alpha + 1} = 1 - \sin^2 \alpha$$

donde, facendo i dovuti calcoli, si ottiene:

$$\sin^2 \alpha = \frac{\tan^2 \alpha}{\tan^2 \alpha + 1}$$

ed estraendo la radice quadrata:

$$\sin \alpha = \pm \frac{\tan \alpha}{\sqrt{\tan^2 \alpha + 1}}$$